

УДК 533.6.013.42

© 2006 г. В. В. ВЕДЕНЕЕВ

О ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ФЛАТТЕРЕ ПЛАСТИНЫ

Ранее с помощью метода глобальной неустойчивости была исследована устойчивость пластины, имеющей форму полосы, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Наряду с классическим (низкочастотным) флаттером, возникающим при взаимодействии форм колебаний пластины, был обнаружен новый (высокочастотный) тип флаттера, при котором колебания происходят по одной форме. В настоящей работе исследуется влияние на высокочастотный флаттер ширины пластины (ранее был проведен лишь асимптотический анализ при ширине, стремящейся к бесконечности), ее демпфирующих свойств и наличия покоящегося газа с противоположной стороны от обтекаемой поверхности.

Ключевые слова: высокочастотный флаттер, флаттер пластины, панельный флаттер, устойчивость пластины, глобальная неустойчивость.

В работе [1] в линейной постановке рассматривалась задача об устойчивости тонкой упругой пластины, обтекаемой с одной стороны однородным сверхзвуковым потоком невязкого совершенного газа. Поведение системы пластина–газ описывается пятью безразмерными параметрами:

$$M = \frac{u \cos \theta}{a}, \quad M_w = \frac{\sqrt{\sigma/\rho_m}}{a}, \quad D = \frac{D_w}{a^2 \rho_m h^3}, \quad L = \frac{L_w}{h}, \quad \mu = \frac{\rho}{\rho_m}$$

Здесь u , a и ρ – скорость течения, скорость звука и плотность газа, σ – растягивающее напряжение в срединной плоскости пластины, ρ_m , L_w и h – плотность материала, ширина и толщина пластины, $D_w = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ – ее изгибная жесткость. Газ течет в области $z > 0$, пластина занимает область $z = 0$, $|x| \leq L/2$, угол между направлением течения и кромками пластины равен $\pi/2 - \theta$. Считается, что $M > 1$, $\mu \ll 1$.

В [1] исследование проведено асимптотически при $L \rightarrow \infty$. Были обнаружены два типа неустойчивости: высокочастотный и низкочастотный флаттер. Низкочастотный флаттер – классический, и он возникает при взаимодействии двух форм колебаний пластины через аэродинамическую связь, он был подробно исследован в многочисленных работах по флаттеру пластин. При высокочастотном флаттере колебания происходят по одной форме и являются следствием отрицательного аэродинамического демпфирования, этот тип флаттера был теоретически обнаружен впервые.

Условие $L \rightarrow \infty$ использовалось дважды. Во-первых, в методе глобальной неустойчивости [2, 3, § 65], использованном при решении задачи на собственные значения, считалось, что из четырех бегущих волн, существующих при заданной частоте в системе пластина – газ, существенны только две волны. Во-вторых, давление, действующее на колеблющуюся пластину, вычислялось не по точной формуле, а считалось суперпозицией давлений, действующих на гармонические волны в воображаемой безграничной пластине.

Настоящая работа является продолжением работы [1] и посвящена оценке ширины пластин, к которым применимы результаты исследования высокочастотного флаттера.

Кроме того, выясняется влияние конструкционного демпфирования и диссипации энергии в материале пластины, а также влияние покоящегося газа в области $z < 0$.

Считается, что выполнено условие $M > M_w + 1$, которое является критерием высокочастотного флаттера пластин достаточно большой ширины.

1. Влияние ширины пластины на распределение давления. Критерий глобальной неустойчивости, имеющий место для одномерных систем большой, но конечной протяженности, применялся в [1] для системы пластина – газ, в которой конечную протяженность имеет пластина, а газ течет вдоль всей оси x . Собственные формы колебаний пластины строились в виде суперпозиции бегущих по безграничной пластине волн вида

$$w(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}, \quad |x| < \infty \quad (1.1)$$

удовлетворяющей граничным условиям на краях $x = \pm L/2$, а давление газа считалось суперпозицией давлений

$$p(x, t) = \mu \frac{(\omega - Mk)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk)^2}} e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.2)$$

действующих на эти волны. В результате удовлетворяются все уравнения и граничные условия, кроме условия отсутствия возмущений при $x < -L/2$. Для его удовлетворения нужно было бы строить решения из волн вида

$$w(x, t) = W(x)e^{-i\omega t}, \quad |x| \leq L/2, \quad w(x, t) = 0, \quad x < -L/2$$

удовлетворяющих уравнению движения пластины, записанному с учетом давления, действующего на нее. Такое давление в окрестности передней кромки пластины ($x = -L/2$) может существенно отличаться от (1.2), однако для неустойчивых возмущений это различие стремится к нулю при удалении от передней кромки. При этом, так как поток сверхзвуковой, различие давлений, порождаемое задней кромкой, не оказывает влияния на колебания пластины.

Для оценки допущенной погрешности воспользуемся точным интегродифференциальным уравнением движения пластины, обтекаемой потоком газа [4, § 4.7]:

$$D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - M_w^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \omega^2 W + \frac{\mu}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(-i\omega + M \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_{-L/2}^x \left(-i\omega W(\xi) + M \frac{\partial W(\xi)}{\partial \xi} \right) \times \\ \times \exp\left(\frac{iM\omega(x - \xi)}{M^2 - 1} \right) J_0\left(\frac{-\omega(x - \xi)}{M^2 - 1} \right) d\xi = 0 \quad (1.3)$$

В работе [5] было получено общее решение этого уравнения; базис образуют четыре решения, которые в используемых обозначениях записываются так:

$$W_j(x) = \sum_{l=1}^4 b_{jl} e^{ik_l(x+L/2)} + V_j(x), \quad k_l = k_l(\omega, \mu) \quad (1.4)$$

$$b_{jl} = \frac{k_l(\omega, \mu) - \omega/M}{k_l(\omega, \mu) - k_j(\omega, 0)} \frac{iD\sqrt{M^2 - 1}}{\sqrt{k_j^2(\omega, \mu) - (\omega - Mk_j(\omega, \mu))^2}} \left(\frac{\partial F}{\partial k} \Big|_{k=k_j(\omega, \mu)} \right)^{-1}$$

$$V_j(x) = M \int_0^{2M/(M^2-1)} \frac{g(\rho, \omega)}{i\omega(\rho - M/(M-1))/M + ik_j(\omega, 0)} e^{-i\omega(x+L/2)(\rho - M/(M-1))/M} d\rho$$

$$g(\rho, \omega) = g_1(\rho, \omega)/g_2(\rho, \omega)$$

$$g_1(\rho, \omega) = -\frac{2i\omega}{M}\left(\rho - \frac{1}{M-1}\right)\sqrt{\rho\left(\frac{2M}{M-1} - \rho\right)}G(\rho, \omega)$$

$$g_2(\rho, \omega) = -\frac{\omega^2\rho}{M^2}\left(\frac{2M}{M^2-1} - \rho\right)G^2(\rho, \omega) - \frac{\mu^2 M^4}{M^2-1} \frac{1}{D^2}\left(\rho - \frac{1}{M-1}\right)^4$$

$$G(\rho, \omega) = -\left(\rho - \frac{M}{M-1}\right)^4 \frac{\omega^2}{M^2} - \frac{M_w^2}{D}\left(\rho - \frac{M}{M-1}\right)^2 + \frac{M^2}{D}$$

Волновые числа $k_j(\omega, \mu)$ являются решениями дисперсионного уравнения безграничной системы пластина-газ

$$F(k, \omega) = (Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2) - \mu \frac{(\omega - Mk)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk)^2}} = 0 \quad (1.5)$$

причем случай $\mu = 0$ соответствует отсутствию газа, т.е. колебанию пластины в вакууме. Ветви квадратного корня в (1.5) при $\text{Im}\omega \gg 1$ выбираются так, чтобы его вещественная часть была положительной. Это условие выделяет четыре ветви решения $k_j(\omega)$, которые аналитически продолжаются на всю комплексную плоскость ω , из которой вырезана окрестность линии $\text{Re}\omega = 0$, $\text{Im}\omega \leq M_w^2/(2\sqrt{D})$ ширины $\sim \mu^{2/3}$, содержащая все точки ветвления решений. Ветви $k_j(\omega)$ пронумерованы так, что при $\text{Im}\omega \gg 1$ увеличению номера j соответствует уменьшение мнимой части $\text{Im}k_j$.

Считая, что μ является малым параметром, легко заметить, что матрица $\|b_{jl}\|$ содержит на диагонали элементы порядка $1/\mu$, а вне диагонали – порядка 1, поэтому обратная к ней матрица $\|c_{jl}\|$ содержит на диагонали элементы порядка μ , а вне диагонали – порядка μ^2 .

Перейдем от базиса решений (1.4) к базису

$$W_j(x) = e^{ik_j x} + e^{-ik_j L/2} \sum_{l=1}^4 c_{jl} V_l(x) \quad (1.6)$$

При $\text{Im}\omega > 0$ (случай неустойчивости) функции $V_l(x)$ экспоненциально убывают при удалении от передней кромки. Составляя из волн (1.6) линейную комбинацию и подставляя ее в граничные условия на кромках пластины, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов линейной комбинации. Условием существования нетривиальных решений является равенство ее определителя нулю, из которого находятся собственные частоты ω . Проводя с этим определителем процедуру, аналогичную [2], и пользуясь тем, что равенство $\text{Im}k_2(\omega) = \text{Im}k_3(\omega)$ выполняется при $\text{Im}k_{2,3} < 0$, можно показать, что отличие точного решения, составленного из волн (1.6), от решения, составленного из волн (1.1), имеет порядок μ и не приводит к ограничениям на ширину пластины.

Физически это очевидно: глобальные собственные функции образуются при отражениях волн, амплитуда которых на передней кромке имеет порядок 1 и возрастает при удалении от нее, а амплитуда добавочного слагаемого в (1.6) на передней кромке имеет порядок μ и убывает при удалении от нее. Таким образом, эти добавочные члены пренебрежимо малы и не могут помешать механизму образования глобальных собственных функций, описанному в [1].

При $\text{Im}\omega < 0$, т.е. в случае устойчивости, функции $V_l(x)$ не ограничены, и при достаточном удалении от передней кромки точные решения будут сколь угодно сильно отличаться от гармонических волн. Однако это отличие не приводит к неустойчивости, а выражается лишь в существенном изменении форм колебаний пластины в газе по сравнению с ее колебаниями в вакууме.

2. Влияние ширины пластины на механизм образования глобальных собственных функций. Собственные функции пластины в газе в общем случае являются суперпозицией четырех бегущих волн: $w(x, t) = (C_1 e^{ik_1 x} + C_2 e^{ik_2 x} + C_3 e^{ik_3 x} + C_4 e^{ik_4 x}) e^{-i\omega t}$ (уточненым, полученным в предыдущем разделе, пренебрегаем). Однако две из них, первая и четвертая, экспоненциально быстро затухают при удалении от кромок, и в некоторой центральной области пластины собственные функции можно считать суперпозицией только двух бегущих в противоположные стороны волн. В этом заключается идея построения глобальных собственных функций. Оценим ширину L , достаточную для того, чтобы считать, что влияние затухающих волн на колебания пластины несущественно, и они не могут помешать механизму образования растущих высокочастотных собственных функций [1].

Считая, что $\omega = \omega_{\max} = (M-1) \sqrt{((M-1)^2 - M_w^2)/D}$ – вещественная частота, при которой достигается максимум показателя роста собственных функций δ_{\max} , представим, что волна $C_2 e^{ik_2 x}$, близка к гармонической ($|\text{Im}k_2| \ll 1$), бегущая от передней кромки к задней, отражается от последней и порождает две волны, бегущие в обратную сторону: близкую к гармонической $C_3 e^{ik_3 x}$ и затухающую $C_4 e^{ik_4 x}$. Тогда можно считать, что к передней кромке вернулась только волна $C_3 e^{ik_3 x}$, если амплитуда затухающей волны по приходу к передней кромке стала пренебрежимо малой по сравнению с амплитудой волны $C_3 e^{ik_3 x}$, т.е.

$$\frac{|C_4| e^{\text{Im}k_4 L}}{|C_3| e^{\text{Im}k_3 L}} \leq \varepsilon$$

где ε – заданное малое число, откуда

$$L \geq (\text{Im}k_3 - \text{Im}k_4)^{-1} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{C_4}{C_3} \right| \right) \quad (2.1)$$

Пусть теперь волна $C_3 e^{ik_3 x}$ бежит от задней кромки к передней. После отражения она превратится в две волны: близкую к гармонической $C_2 e^{ik_2 x}$ и затухающую $C_1 e^{ik_1 x}$. Аналогичные рассуждения приводят к условию, при котором затухающей волной на задней кромке можно пренебречь:

$$L \geq (\text{Im}k_1 - \text{Im}k_2)^{-1} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{C_1}{C_2} \right| \right) \quad (2.2)$$

При увеличении L отношения амплитуд $|C_4/C_3|$ и $|C_1/C_2|$ экспоненциально убывают, поэтому для заданного ε существует минимальная ширина пластины L_{\min} , такая, что неравенства (2.1) и (2.2) выполнены при всех $L \geq L_{\min}$.

Так как с точностью до малых порядка μ

$$\text{Im}k_1(\omega, \mu) = -\text{Im}k_4(\omega, \mu) = \text{Im}k_1(\omega, 0)$$

$$\text{Im}k_2(\omega, \mu) = \text{Im}k_3(\omega, \mu) = 0$$

одновременное выполнение условий (2.1), (2.2) эквивалентно

$$L \geq \frac{1}{\text{Im}k_1(\omega, 0)} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \max \left(\left| \frac{C_4}{C_3} \right|, \left| \frac{C_1}{C_2} \right| \right) \right) \quad (2.3)$$

Приведем примеры вычисления L_{\min} для параметров

$$M = 1.5, \quad M_w = 0, \quad D = 23.8, \quad \mu = 1.2 \cdot 10^{-4} \quad (2.4)$$

соответствующих обтеканию стальной пластины потоком воздуха при нормальных условиях, при $\varepsilon = 0.01$. Из дисперсионного уравнения (1.5) при $\omega = \omega_{\max} \approx 0.051$ имеем $k_1(\omega, 0) \approx 0.1i$. Тогда в случае шарнирного опирания по обеим кромкам

$$\left| C_1/C_2 \right| = \left| C_4/C_3 \right| \sim \text{Im}k_{2,3}(\omega, \mu) < 10^{-3} < \varepsilon$$

откуда $L_{\min} = 0$.

В случае защемления по обеим кромкам

$$\left| \frac{C_1}{C_2} \right| = \left| \frac{C_4}{C_3} \right| \approx \frac{|\cos(Lk_2(\omega, 0)/2)|}{\text{ch}(Lk_2(\omega, 0)/2)}$$

и

$$\left| \frac{C_1}{C_2} \right| = \left| \frac{C_4}{C_3} \right| \approx \frac{|\sin(Lk_2(\omega, 0)/2)|}{\text{sh}(Lk_2(\omega, 0)/2)}$$

для симметричных и антисимметричных форм колебаний. Подставляя эти выражения в (2.3), получаем $L_{\min} \approx 35.4$.

Видно, что ширина, при которой “побочные” затухающие волны существенны только вблизи кромок, весьма мала (так, для защемленной пластины толщиной 1 мм эта ширина равна 3.54 см). Такая же ситуация наблюдается и при других реалистичных граничных условиях и значениях параметров. Она вызвана большой скоростью затухания “побочных” волн при удалении от кромок и хорошо известна в теории пластин как “динамический краевой эффект” [6, §34].

3. Влияние демпфирования пластины на рост высокочастотных собственных функций. Для оценки влияния демпфирования нужно знать величину показателя роста собственных функций в идеальной системе, из сравнения которого с декрементом затухания определяется наличие или отсутствие флаттера.

Для показателя роста высокочастотных собственных функций имеем [1] (ω – вещественная частота колебаний пластины в отсутствие газа)

$$\delta(\omega) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial k_2(\omega, 0)}{\partial \omega} \right)^{-1} \text{Im}(k_2(\omega, \mu) - k_3(\omega, \mu)) \quad (3.1)$$

Главный член разложения $k_j(\omega, \mu)$ по малому параметру μ при $j = 2$ линеен для частот ω , лежащих вне окрестности ω_{\max} , а при $j = 3$ – для всех ω (при $j = 2$ разложение будет нелинейным также для частоты ω , при которой фазовая скорость $c(\omega) = \omega/k_2(\omega, 0) \approx M + 1$,

однако этот случай соответствует затуханию собственной функции и поэтому рассматриваться не будет). Из дисперсионного уравнения (1.5) находим

$$k_j(\omega, \mu) = k_j(\omega, 0) + \mu l(k_j(\omega, 0)),$$

$$l(k_j) = \frac{(\omega - Mk_j)^2}{2k_j(M_w^2 + 2Dk_j^2)\sqrt{k_j^2 - (\omega - Mk_j)^2}} \quad (3.2)$$

В окрестности ω_{\max} главный член разложения $k_2(\omega, \mu)$ имеет порядок $\mu^{2/3}$, за исключением случая $M - 1 \sim M_w \lesssim \mu^{1/2}$, при котором показатель при μ в главном члене меньше $2/3$, и который ввиду малой общности рассматривать не будем. Вводя в этой окрестности локальную переменную $p \in \mathbf{R}$: $\omega = \omega_{\max} + \mu^{2/3}p$ и подставляя выражение $k_2(\omega, \mu) = k_2(\omega_{\max}, 0) + \mu^{2/3}s(p)$ в (1.5), получаем связь между s и p :

$$\left(s\left(\frac{2(M-1)^2 - M_w^2}{M-1}\right) - p\right)^2 (s(M-1) - p) + \frac{\sqrt{(M-1)^2 - M_w^2}}{8\sqrt{D}(M-1)^2} = 0 \quad (3.3)$$

При этом для возможности склейки $k_2(\omega, \mu)$ с линейным разложением (3.2) вне окрестности ω_{\max} должна выбираться та ветвь $s(p)$, которая является непрерывным продолжением значения

$$s(0) = \left(\frac{\sqrt{(M-1)^2 - M_w^2}}{8\sqrt{D}(M-1)^3} \left(\frac{2(M-1)^2 - M_w^2}{M-1}\right)^{-2}\right)^{1/3} e^{-i\pi/3}$$

Исследование уравнения (3.3) приводит к следующим свойствам зависимости $s(p)$:

1) При $p > p^*$ ($M, M_w, D > 0$) значение $s(p)$ является вещественным, причем при $p = p^*$ кривая $s(p)$ на комплексной плоскости s имеет излом с углом $\pi/2$.

2) При $0 < p < p^*$ значение $\text{Im}s(p)$ отрицательно.

3) При $p = 0$ значение $\text{Im}s(p)$ достигает абсолютного минимума.

4) При $p \rightarrow -\infty$ значение $\text{Im}s(p)$ отрицательно и стремится к нулю с порядком $1/\sqrt{|p|}$.

Эти свойства позволяют построить зависимость $\delta(\omega)$ в окрестности ω_{\max} , которая вне этой окрестности сращивается с зависимостью, определяемой формулами (3.1), (3.2). Качественно она имеет такой же вид, как на фиг. 1, где она построена численно для параметров (2.4).

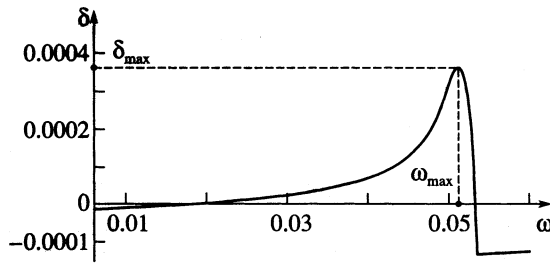
Пользуясь тем, что $\text{Im}s(p)$ достигает минимума при $p = 0$, легко вычислить максимальный показатель роста высокочастотных собственных функций

$$\delta_{\max}(M, M_w, D, \mu) = \delta(\omega_{\max}) =$$

$$= \mu^{2/3} \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{(M-1)^2 - M_w^2}{D}\right)^{1/6} \frac{(2(M-1)^2 - M_w^2)^{1/3}}{(M-1)^{4/3}} - \mu \frac{(2M-1)^2}{4(M-1)\sqrt{(2M-1)^2 - 1}} \quad (3.4)$$

Рассмотрим теперь модель пластины с демпфированием. Существуют два источника демпфирования – рассеяние энергии в материале пластины и конструкционное демпфирование в местах закрепления [6, §4]. Выясним влияние ширины пластины на демпфирование при условии, что остальные параметры задачи фиксированы.

Рассеяние в материале пластины учтем с помощью модели вязкоупругости. В простейшем варианте она сводится к добавлению в уравнение движения пластины двух членов: $-\gamma_1 \partial w / \partial t$ (вязкое трение при вертикальном смещении точек пластины) и $\gamma_2 \partial^3 w / \partial z^2 \partial t$ (вязкое трение при изгибе), $\gamma_{1,2} > 0$ – соответствующие коэффициенты демп-



Зависимость $\delta(\omega)$ при параметрах (2.4)

фирования. Это приводит к появлению дополнительных членов в левой части дисперсионного уравнения (1.5): $-\gamma_1 i\omega$ и $-\gamma_2 ik^2\omega$. Считая, что $\gamma_{1,2} \ll 1$, можно показать, что эти члены порождают следующую добавку к показателю роста собственных функций: $\delta_\gamma(\omega) = -(\gamma_1 + \gamma_2 k^2(\omega, 0))/2$. Тогда условием роста высокочастотных собственных функций при наличии рассеяния энергии в материале пластины является неравенство

$$\delta_{\max} > -\delta_\gamma(\omega_{\max}) = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 k^2(\omega_{\max}, 0)) \tag{3.5}$$

Критерий (3.5) не зависит от ширины пластины. В частности, если рассеяние энергии в материале достаточно велико, то высокочастотный флаттер пластины не сможет возникнуть, какова бы ни была ее ширина.

Конструкционное демпфирование вызвано трением, возникающим при микроперемещениях пластины относительно неподвижных частей закрепляющей конструкции. При заданном способе закрепления эти микроперемещения, а следовательно, и трение определяются длиной волны и амплитудой колебаний. Поскольку при высокочастотном флаттере колебания независимо от ширины пластины происходят при частоте и показателе роста, близких к ω_{\max} и $\delta_{\max} + \delta_\gamma(\omega_{\max})$, то длина и амплитуда растущих во времени волн у пластин, имеющих разную ширину, при одинаковых параметрах M, M_w, D, μ будут совпадать. Таким образом, трение в местах закрепления при флаттерных колебаниях не зависит от ширины пластины.

С макроскопической точки зрения конструкционное демпфирование приводит к уменьшению коэффициентов отражения волн от кромок пластины. Рассмотрим еще раз процесс отражения волн, приводящий к росту амплитуды собственных колебаний.

Представим, что на передней кромке возбуждается бегущая волна $C_2 e^{i(k_2 x - \omega t)}$, имеющая единичную амплитуду. При достижении ею задней кромки ее амплитуда будет равна $C_2 e^{-\text{Im}k_2 L}$. После отражения она превратится в волну $A_{23} C_2 e^{-\text{Im}k_2 L} e^{\text{Im}k_3 L/2} e^{i(k_3 x - \omega t)}$, где коэффициент отражения $A_{23} = C_3/C_2 - A'_{23}$, причем $A'_{23} > 0$ – добавка, вызванная трением в закреплении по задней кромке. Когда эта волна достигнет передней кромки, ее амплитуда будет равна $A_{23} C_2 e^{-\text{Im}k_2 L} e^{3\text{Im}k_3 L/2}$. После отражения она превратится в волну $A_{32} A_{23} C_2 e^{-\text{Im}k_2 L} e^{3\text{Im}k_3 L/2} e^{-\text{Im}k_2 L/2} e^{i(k_2 x - \omega t)}$, где аналогично коэффициент отражения $A_{32} = C_2/C_3 - A'_{32}$, $A'_{32} > 0$. Считая A'_{ij} малыми и сравнивая амплитуду дважды отраженной волны с исходной, получаем, что увеличение амплитуды после двойного отражения (т.е. рост собственной функции) происходит при

$$\left(1 - \frac{C_3}{C_2} A'_{32} - \frac{C_2}{C_3} A'_{23}\right) e^{3(\text{Im}k_3 - \text{Im}k_2)L/2} > 1$$

что, учитывая (3.1), с точностью до малых порядка A'_{ij} эквивалентно

$$L > \frac{1}{3\delta_{\max}} \left(\frac{C_3}{C_2} A'_{32} + \frac{C_2}{C_3} A'_{23} \right) \left(\frac{\partial k_2(\omega, 0)}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_{\max}} \right)^{-1} \quad (3.6)$$

Как было показано выше, A'_{ij} , а значит, и вся правая часть неравенства (3.6) при заданном способе закрепления пластины не зависит от ее ширины. Таким образом, влияние конструкционного демпфирования на высокочастотный флаттер принципиально отличается от влияния диссипации энергии в материале. В то время как достаточно большое рассеяние в материале подавляет высокочастотный флаттер пластин любой ширины, конструкционное демпфирование предотвращает возникновение флаттера только в том случае, если ширина не превышает значения (3.6), в противном случае флаттер возникнет, но рост собственных функций будет происходить медленнее, чем при отсутствии демпфирования.

Учет одновременно и рассеяния в материале, и конструкционного демпфирования приводит к критерию высокочастотного флаттера

$$(\delta_{\max} + \delta_{\gamma}(\omega_{\max}))L > \frac{1}{3} \left(\frac{C_3}{C_2} A'_{32} + \frac{C_2}{C_3} A'_{23} \right) \left(\frac{\partial k_2(\omega, 0)}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_{\max}} \right)^{-1}$$

В металлах рассеяние энергии, как правило, очень мало и, в частности, на порядок меньше конструкционного демпфирования реальных систем [6, §4]. В определенном диапазоне чисел Маха оно мало и по сравнению с показателем роста собственных функций при флаттере δ_{\max} . Действительно, пользуясь экспериментальными данными логарифмических декрементов затухания для металлов [7], можно вычислить значения показателей экспонент δ_{γ} , огибающих процесс затухающих колебаний. В частности, при $M = 1.5$, $M_w = 0$ и колебаниях чистого изгиба с напряжениями $\sigma < 2$ кгс/мм² для образцов из алюминия, сталей и титановых сплавов значения $|\delta_{\gamma}(\omega_{\max})|$ не превосходят соответственно $1.7 \cdot 10^{-4}$, $5.7 \cdot 10^{-5}$ и $5.2 \cdot 10^{-6}$, в то время как δ_{\max} для них в несколько раз выше и приближенно равны $6 \cdot 10^{-4}$, $3.5 \cdot 10^{-4}$, $1 \cdot 10^{-3}$. Поскольку при достаточно большой ширине пластины или достаточно надежном закреплении конструкционное демпфирование можно сделать сколько угодно малым, получаем, что для металлической пластины можно подобрать такую ширину (а для заданной ширины – силу зажима) и диапазон чисел Маха, что она будет находиться в области флаттера при учете демпфирования в ней. Отметим, что в высокомолекулярных и, в частности, в композиционных материалах рассеяние энергии может быть значительным [6, §4] и может привести к существенному уменьшению области флаттера или к его полному подавлению для пластин любой ширины.

4. Влияние наличия сжимаемого газа по другую сторону от пластины. Рассмотренная постановка задачи описывает случай течения газа с одной стороны от пластины при наличии постоянного давления с другой, и двухстороннее обтекание пластины одним и тем же газом, движущимся с одной и той же скоростью. Рассмотрим случай, когда пластина обтекается газом с одной стороны, а с другой находится покоящийся (в общем случае отличный от движущегося) невязкий совершенный газ.

Показатель роста собственных функций по-прежнему дается формулой (3.1). Дисперсионное уравнение записывается в виде [8]

$$F(k, \omega) = (Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2) - \mu_1 \frac{(\omega - Mk)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk)^2}} - \mu_2 \frac{\omega^2}{\sqrt{k^2 - (\omega/\chi)^2}} = 0 \quad (4.1)$$

Здесь $\mu_j = \rho_j/\rho_m$, $\chi = a_2/a_1$, ρ_j и a_j – плотность и скорость звука j -го газа, индекс “1” относится к движущемуся газу, “2” – к покоящемуся. Ветви радикалов выбираются по тому же правилу, что и в (1.5). Считая, что $\mu_j \ll 1$, имеем следующее разложение волнового числа по параметрам μ_j :

$$k(\omega, \mu_1, \mu_2) = k(\omega, 0, 0) + \frac{\mu_1 l_1(k) + \mu_2 l_2(k)}{2k(M_w^2 + 2Dk^2)} \Big|_{k=k(\omega, 0, 0)} \quad (4.2)$$

$$l_1(k) = \frac{(\omega - Mk)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk)^2}}, \quad l_2(k) = \frac{\omega^2}{\sqrt{k^2 - (\omega/\chi)^2}}$$

справедливое для тех частот, при которых фазовая скорость $c = \omega/k(\omega, 0, 0) \neq M \pm 1$, $c \neq \pm\chi$.

Рассмотрим пару волн $k_{2,3}(\omega)$, движущихся в противоположные стороны и образующих глобальную собственную функцию. В [1] на основе изучения сдвига фаз между волной, бегущей по пластине, и давлением, действующим на нее со стороны движущегося газа, было установлено, что под влиянием этого газа волна, бегущая против потока (k_3), всегда затухает, а волна, бегущая по потоку (k_2), усиливается при $c < M - 1$, сохраняет амплитуду при $M - 1 < c < M + 1$, и затухает при $c > M + 1$; здесь $c = \omega/k(\omega)$ – фазовая скорость волны. Рассматривая сдвиг фаз между волной и давлением покоящегося газа, можно показать, что его влияние на рост этих волн следующее: при $|c| < \chi$ волны не меняют амплитуды, а при $|c| > \chi$ затухают.

Отсюда видно, что рост бегущей по потоку волны (а значит, и всей собственной функции) может происходить только под влиянием движущегося газа, и частота, соответствующая максимальному росту, остается той же, что и без учета покоящегося газа:

$$c(\omega_{\max}) = M - 1 \Rightarrow \omega_{\max} = (M - 1) \sqrt{((M - 1)^2 - M_w^2)/D}$$

При этой частоте разложение (4.2) должно быть заменено нелинейным аналогично случаю, рассматриваемому в разд. 3.

Пользуясь качественными свойствами влияния покоящегося и движущегося газов на волны, бегущие по пластине, легко получить свойства зависимости $\delta_{\max}(M) = \delta(\omega_{\max}(M))$. При $c = M - 1 < \chi$ показатели роста, вычисленные без учета и при учете покоящегося газа, совпадают, поскольку последний не дает вклада в изменение амплитуд бегущих волн. Если $c = M - 1 > \chi$, то покоящийся газ обладает демпфирующим свойством: показатель роста под его влиянием уменьшается. Максимальному демпфированию с его стороны соответствует случай $M - 1 = \chi$, поскольку фазовая скорость волн в этом случае совпадает со скоростью звука в покоящемся газе, и влияние последнего на амплитуды волн максимально. В зависимости от соотношений между μ_1 , μ_2 и χ возможны ситуации, когда демпфирование покоящегося газа не может подавить флаттер при $M - 1 > \chi$, полностью его подавляет или подавляет только при $M - 1 \approx \chi$, а при больших M флаттер возникает вновь. По аналогии с разд. 3 можно получить явное выражение $\delta_{\max}(M)$ при $M - 1 < \chi$, $M - 1 \approx \chi$ и $M - 1 > \chi$ и найти условия, при которых один случай сменяется другим, однако ввиду громоздкости эти результаты здесь не приведены.

Заключение. Проведена оценка ширины пластин, к которым применимы результаты исследования высокочастотного флаттера [1]. Рассмотрены четыре источника погрешности: неточность в определении давления, действующего на колеблющуюся пластину, использование метода глобальной неустойчивости при решении задачи на собственные значения для пластины конечной ширины, пренебрежение демпфированием колебаний пластины и наличием покоящегося газа с другой стороны от обтекаемой поверхности.

Неточность в определении давления, действующего на колеблющуюся пластину, пренебрежимо мала и не накладывает ограничений на ее ширину.

Получена оценка ширины пластины, при которой для исследования задачи на собственные значения можно применять теорию глобальной неустойчивости, т.е. считать собственные функции состоящими из двух бегущих волн и пренебрегать затухающими волнами.

Исследовано влияние рассеяния энергии в материале пластины и конструкционного демпфирования на собственные функции и получено условие их роста. Достаточно большое рассеяние в материале предотвращает флаттер пластин любой ширины, в то время как конструкционное демпфирование при достаточно большой ширине может быть сделано сколь угодно малым, и поэтому для достаточно широких пластин оно не может подавить флаттер.

Учет покоящегося газа, находящегося около поверхности пластины, противоположной обтекаемой, при $M - 1 < \chi$, где M – число Маха, χ – отношение скорости звука покоящегося газа к скорости звука движущегося, не оказывает влияние на рост собственных функций, а при $M - 1 > \chi$ обладает демпфирующим действием и может частично или полностью подавить флаттер.

Автор выражает благодарность А.Г. Куликовскому за ценные замечания и обсуждение результатов и М.Е. Колотникову за обсуждение вопросов, связанных с демпфированием колебаний.

Работа поддержана грантом РФФИ № 05-01-00219 и грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-1697.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Веденеев В.В.* Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 155–169.
2. *Куликовский А.Г.* Об устойчивости однородных состояний // Изв. АН СССР. ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148–153.
3. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
4. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
5. *Дун Мин-Дэ.* Об устойчивости упругой пластинки при сверхзвуковом обтекании // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120. № 4. С. 726–729.
6. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980. 408 с.
7. *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Киев: Наук. думка, 1971.
8. *Веденеев В.В.* Неустойчивость безграничной упругой пластины, обтекаемой потоком газа // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 4. С. 19–27.

Москва

Поступила в редакцию
25.VIII.2005