

УДК 533.6.13.42

© 2006 г. В. В. ВЕДЕНЕЕВ

**ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ ФЛАТТЕР ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ**

В недавнем исследовании флаттера пластины, имеющей форму полосы, были получены два типа флаттера: низкочастотный и высокочастотный. Первый возникает из-за взаимодействия форм колебаний и был подробно исследован в многочисленных работах по флаттеру с помощью приближенной поршневой теории. Высокочастотный флаттер был получен впервые, он является следствием отрицательного аэродинамического демпфирования и не может быть получен с помощью поршневой теории. В настоящей работе проводится исследование высокочастотного флаттера пластины, имеющей форму прямоугольника.

*Ключевые слова:* высокочастотный флаттер, флаттер пластины, панельный флаттер, устойчивость пластины, глобальная неустойчивость.

В [1, 2] с помощью метода глобальной неустойчивости одномерных систем [3, 4, § 65] была исследована устойчивость пластины, имеющей форму полосы и обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. В [5] этот метод был распространен на случай двумерных систем. В настоящей работе он применен для исследования устойчивости пластины, имеющей форму прямоугольника.

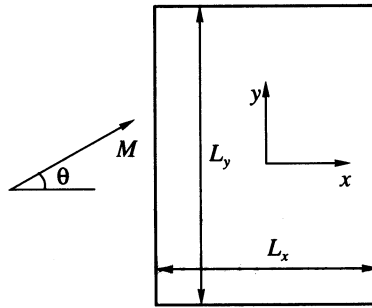
Суть этого метода применительно к рассматриваемой задаче состоит в следующем. Каждое собственное колебание при достаточно больших размерах пластины можно представить в виде суперпозиции четырех бегущих волн. Влияние газа на такие волны было исследовано в [1, 2]. Используя результаты этих исследований, можно подсчитать относительное изменение амплитуды при последовательных отражениях волн. Сравнивая его с единицей, определяем, затухает колебание под действием газа или усиливается.

**1. Постановка задачи.** Тонкая упругая изотропно натянутая пластина, имеющая форму прямоугольника, с одной стороны обтекается однородным сверхзвуковым потоком невязкого совершенного газа, а с другой стороны от нее поддерживается постоянное давление, равное невозмущенному давлению газа. Пластина вмонтирована в абсолютно жесткую плоскость, отделяющую поток от области постоянного давления. Требуется исследовать систему на устойчивость по отношению к возмущениям высокой частоты, когда влияние газа на колебания пластины мало.

Введем систему координат  $x, y, z$ , как показано на фиг. 1. Газ течет в области  $z > 0$  под углом  $\theta$  к оси  $x$ , пластина лежит в области  $W$ :  $|x| < L_x/2$ ,  $|y| < L_y/2$ ,  $z = 0$ . Ширина и длина пластины  $L_x$  и  $L_y$  считаются обезразмеренными на ее толщину. Кроме них в задаче имеются следующие безразмерные параметры:

$$M = \frac{u}{a}, \quad M_w = \frac{\sqrt{\sigma/\rho_m}}{a}, \quad D = \frac{D_w}{a^2 \rho_m h^3}, \quad \mu = \frac{\rho}{\rho_m}$$

Величины  $u$ ,  $a$  и  $\rho$  – скорость течения, скорость звука и плотность газа,  $\sigma$  – растягивающее напряжение в срединной плоскости пластины,  $\rho_m$  и  $h$  – плотность материала и толщина пластины,  $D_w = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$  – ее изгибная жесткость. Будем считать, что  $M > 1$ ,  $\mu \ll 1$ . Также будем предполагать, что  $L_x \gg 1$ ,  $L_y \gg 1$ , смысл этих соотношений будет уточнен ниже.



Фиг. 1. Конфигурация рассматриваемой системы

Дифференциальные уравнения и граничные условия имеют следующий вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + M \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad z > 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + M \cos \theta \frac{\partial w}{\partial x} + M \sin \theta \frac{\partial w}{\partial y}, \quad z = 0, \quad (x, y) \in W$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (x, y) \notin W$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0, \quad z \rightarrow +\infty, \quad q = x, y, z, t$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + M \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + M \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + M^2 w \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) -$$

$$-D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right), \quad z = 0, \quad (x, y) \in W$$

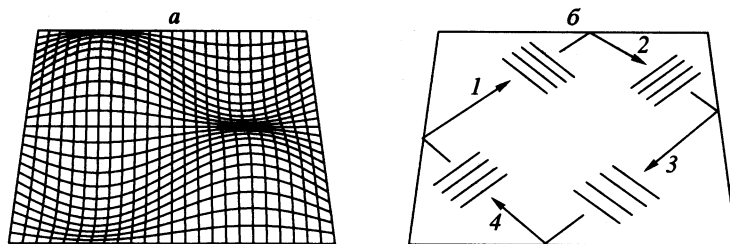
$$Fw = 0, \quad z = 0, \quad (x, y) \in \partial W$$

Здесь  $\varphi$  и  $w$  – безразмерные потенциал возмущения газа и прогиб пластины. Первое уравнение представляет собой волновое уравнение, второе и третье – условие непротекания, четвертое – условие затухания возмущений в газе вдали от пластины, пятое – уравнение движения пластины, шестое – граничные условия на кромках пластины ( $F$  – дифференциальный оператор, задающий по два условия на каждой кромке).

**2. Условие усиления колебаний пластины.** Рассмотрим форму колебаний пластины в вакууме, характеризуемую числами полуволн  $m$  и  $n$  в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно. Будем считать размеры пластины достаточно большими – такими, что имеет место динамический краевой эффект [6, § 34], заключающийся в том, что любая форма колебаний, независимо от граничных условий, вдали от кромок пластины представляется выражением

$$w(x, y, t) = \cos(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) e^{-i\omega t}$$

Здесь  $\omega \in \mathbf{R}$  – частота колебаний,  $k_x, k_y, \varphi_x$  и  $\varphi_y$  – волновые числа и сдвиги фаз, зависящие от числа полуволн  $m$  и  $n$ , граничных условий, размеров и свойств пласти-



Фиг. 2. Собственная форма колебаний пластины – стоячая волна (а) и ее представление в виде суперпозиции четырех бегущих волн (б). Цифрами обозначены направления распространения волн

ны. В частности, в случае шарнирного опирания по всем краям они имеют простой вид:

$$k_x = \frac{m\pi}{L_x}, \quad \varphi_x = \frac{(m-1)\pi}{2}, \quad k_y = \frac{n\pi}{L_y}, \quad \varphi_y = \frac{(n-1)\pi}{2}$$

Представим форму колебаний в виде суперпозиции четырех бегущих волн:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \frac{1}{4i} (e^{i\varphi_x} e^{ik_x x} + e^{-i\varphi_x} e^{-ik_x x}) (e^{i\varphi_y} e^{ik_y y} + e^{-i\varphi_y} e^{-ik_y y}) e^{-i\omega t} = \\ &= C_1 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} + C_2 e^{i(k_x x - k_y y - \omega t)} + C_3 e^{i(-k_x x - k_y y - \omega t)} + C_4 e^{i(-k_x x + k_y y - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пронумеруем направления распространения волн соответственно номеру слагаемого в (2.1) (фиг. 2). Тогда образование стоячей волны можно представить следующим образом. На одной из кромок возбуждается бегущая волна, движущаяся, например, в направлении 1. Последовательно отражаясь от четырех кромок пластины, она превращается в волны, движущиеся в направлениях 2, 3, 4. При последнем отражении она превращается в исходную волну, после чего процесс циклически повторяется. После нескольких таких циклов движение четырех указанных волн приобретает установившийся характер, а их наложение приводит к образованию стоячей волны.

Пусть теперь пластина обтекается газом. Будем пренебрегать влиянием кромок пластины на возмущение потока газа и считать, что поток действует на бегущие волны (2.1) так, как если бы они имели бесконечный размах. Зная влияние газа на такие волны, легко понять его влияние и на собственное колебание в целом. Ниже приведены основные положения исследований действия потока на волны бесконечного размаха [1, 2].

Рассмотрим плоскую волну  $e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$  с волновым вектором  $\{k_x, k_y\} = \{k \cos(\alpha + \theta), k \sin(\alpha + \theta)\}$ , бегущую по воображаемой безграничной пластине, обтекаемой газом.

Здесь  $\alpha$  – угол между вектором скорости газа и волновым вектором,  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ,  $\text{Re} k > 0$ . В отсутствие газа  $k$  вещественно и положительно, при наличии газа  $k$  в общем случае комплексно. Положительное  $\text{Im} k$  соответствует затуханию волны в направлении ее распространения, отрицательное – усилению волны.

Дисперсионное уравнение системы пластина–газ имеет вид

$$(Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2) - \mu \frac{(\omega - Mk \cos \alpha)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk \cos \alpha)^2}} = 0 \quad (2.2)$$

Обозначая  $k_0$  длину волнового вектора в отсутствие газа ( $\mu = 0$ ) и считая  $\mu$  малым параметром, из (2.2) получаем  $k = k_0 + \Delta(k_0)$ , где  $\Delta(k_0)$  – главный член разложения  $k(\mu)$  при малых  $\mu$ . Если фазовая скорость волны  $c_0 = \omega/k_0$  лежит вне малой окрестности  $M \cos \alpha \pm 1$ , то

$$\Delta(k_0) = \frac{\mu(\omega - Mk_0 \cos \alpha)^2}{2k_0(2Dk_0^2 + 2M_w^2)\sqrt{k_0^2 - (\omega - Mk_0 \cos \alpha)^2}} \quad (2.3)$$

Если  $c_0$  лежит в окрестности  $M \cos \alpha - 1$ , то мнимая часть приращения  $\Delta(k_0)$  отрицательна и имеет порядок  $\mu^{2/3}$ . При  $c_0 = M \cos \alpha - 1$  значение  $\text{Im} \Delta(k_0)$  достигает абсолютного минимума, при этом

$$\Delta(k_0) = \mu^{2/3} \left( \frac{\sqrt{(M-1)^2 - M_w^2}}{8\sqrt{D}(M-1)^3} \left( \frac{2(M-1)^2 - M_w^2}{M-1} \right)^{-2} \right)^{1/3} e^{-i\pi/3} \quad (2.4)$$

В окрестности  $M \cos \alpha + 1$  величина  $\text{Im} \Delta(k_0)$  положительна и также имеет порядок  $\mu^{2/3}$ , при  $c_0 = M \cos \alpha + 1$  она достигает абсолютного максимума.

Физический смысл этих соотношений состоит в следующем. Вектор скорости газа можно разложить на две компоненты: лежащую в плоскости волны и перпендикулярную ей. Течение в направлении, перпендикулярном плоскости волны, происходит со скоростью  $M \sin \alpha$  и не оказывает влияния на волну. Течение в плоскости волны происходит со скоростью  $M \cos \alpha$ , и именно этой компонентой определяется действие газа на бегущую по пластине волну. При  $c_0 < M \cos \alpha - 1$  газ движется со сверхзвуковой скоростью относительно волны, причем направление движения волны совпадает с направлением течения газа относительно волны. При  $M \cos \alpha - 1 < c_0 < M \cos \alpha + 1$  движение газа относительно волны дозвуковое. При  $c_0 > M \cos \alpha + 1$  движение газа относительно волны снова сверхзвуковое, однако направление движения волны противоположно направлению движения газа относительно нее. Рассматривая сдвиг фаз между волной, бегущей по пластине, и давлением, действующим на нее, и вычисляя работу, совершаемую давлением за период движения волны, получаем [1]

$$c_0 < M \cos \alpha - 1 \Rightarrow \text{Im} \Delta(k_0) < 0,$$

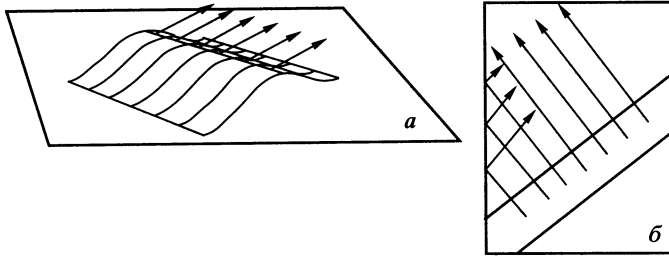
$$M \cos \alpha - 1 < c_0 < M \cos \alpha + 1 \Rightarrow \text{Im} \Delta(k_0) = 0,$$

$$c_0 > M \cos \alpha + 1 \Rightarrow \text{Im} \Delta(k_0) > 0$$

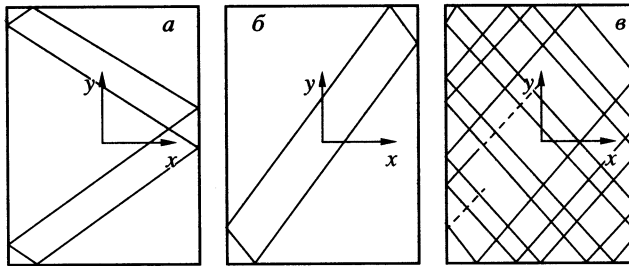
В случае  $c_0 = M \cos \alpha \pm 1$  происходит резонанс между волной, распространяющейся в газе со скоростью  $M \cos \alpha \pm 1$  (передней и задний фронт акустического возмущения) и в пластине со скоростью  $c_0$ , этот резонанс и является причиной наибольшего усиления и затухания волны при указанных значениях  $c_0$ .

Рассмотрим теперь действие газа на собственное колебание. Для этого удобно представлять движение волны как движение ее отдельных участков (фиг. 3). Траектории этих участков между кромками являются отрезками прямых линий, имеющих одно из четырех направлений (фиг. 2, б), а от кромок происходит зеркальное отражение. В зависимости от рассматриваемой формы колебаний траектории могут быть замкнутыми (фиг. 4, а и б) и незамкнутыми (фиг. 4, в). Замкнутая траектория – замкнутая ломаная. Нетрудно показать, что незамкнутая траектория является всюду плотной в прямоугольнике, очерчиваемом контуром пластины.

Будем называть циклом отражений участков волны период времени, за который их траектории вернутся в начальные точки (в случае замкнутой траектории) или близко к ним (в случае незамкнутой). Вычисляя вдоль каждой траектории изменение амплитуды



Фиг. 3. Представление движения волны как движение ее отдельных участков (а), начальные траектории движения этих участков (б)



Фиг. 4. Траектории движения участков волны. Замкнутая траектория, симметричная относительно одной из осей координат (а), замкнутая траектория, несимметричная относительно осей координат (б), незамкнутая траектория (в)

за такой цикл, найдем изменение амплитуды и для волны в целом, поскольку траектории покрывают всю поверхность пластины. Если на разных траекториях усиление амплитуды будет разным, то плоская волна перестанет быть таковой. В этом случае могут проявляться эффекты дифракции, которые, однако, учитывать не будем.

Заметим, что цикл отражений участков волны в общем случае не совпадает с циклом отражений волн как целого, показанным на фиг. 2, б и всегда состоящим из четырех отражений. Действительно, после четырех отражений каждый участок волны может отразиться не в себя, а в другой участок, и отражения таких участков не будут представлять собой замкнутый цикл.

Рассмотрим какую-нибудь траекторию и вычислим изменение амплитуды за цикл отражений. Оно происходит, во-первых, при движении волны от одной кромки до другой из-за наличия мнимой части волнового числа (движение вдоль звеньев траектории), и во-вторых, при отражениях на кромках пластины. Полагая начальную амплитуду равной единице и рассматривая последовательно изменения амплитуды при движении между кромками и при отражениях, получаем амплитуду после цикла отражений (считается, что за указанный промежуток времени произошло  $n$  отражений):

$$\prod_{p=1}^n A_p e^{-l_1 \text{Im}\Delta(k_1) - l_2 \text{Im}\Delta(k_2) - l_3 \text{Im}\Delta(k_3) - l_4 \text{Im}\Delta(k_4)}$$

Здесь  $A_j$  – коэффициенты отражения на кромках,  $l_j$  – суммарные расстояния, проходимые траекторией вдоль  $j$ -го направления. Так как в отсутствие газа амплитуда после

цикла отражений не меняется (поскольку пластина сама по себе является консервативной системой)

$$\prod_{p=1}^n A_p = 1$$

Далее очевидно что  $l_1 = l_3$ ,  $l_2 = l_4$  (в случае незамкнутой траектории эти равенства верны приближенно), поэтому окончательно условие усиления колебания принимает вид

$$l_1 \text{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3)) + l_2 \text{Im}(\Delta(k_2) + \Delta(k_4)) < 0 \quad (2.5)$$

Таким образом, условие (2.5) позволяет определить наличие или отсутствие роста амплитуды для каждой траектории заданной формы колебаний. Если такой рост будет происходить на всех траекториях, то и само колебание будет усиливаться, если же на всех траекториях амплитуда будет уменьшаться, то колебание будет затухать. Если на части траекторий амплитуда увеличивается, а на части уменьшается, то суммарное поведение будет определяться дифракцией волн, для учета которой нужно решать точное уравнение колебаний пластины, обтекаемой потоком газа.

Показатель роста (инкремент) определяется формулой [5]

$$\delta = -g(\omega) \frac{l_1 \text{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3)) + l_2 \text{Im}(\Delta(k_2) + \Delta(k_4))}{2(l_1 + l_2)} \quad (2.6)$$

где  $g(\omega) = (\partial k_y / \partial \omega)^{-1}$  – групповая скорость волн.

**3. Вектор скорости газа параллелен одной из сторон пластины.** Для определенности будем считать, что поток направлен вдоль оси  $x$  ( $\theta = 0$ ). В этом случае в силу симметрии  $\Delta(k_1) = \Delta(k_2)$ ,  $\Delta(k_3) = \Delta(k_4)$ . Тогда условие (2.5) роста амплитуды волны за рассматриваемый цикл отражений сводится к условию

$$\text{Im}\Delta(k_1) < -\text{Im}\Delta(k_3) \quad (3.1)$$

выражающему следующий факт: усиление волн 1 и 2, распространяющихся в направлении потока газа, должно превышать затухание волн 3 и 4, распространяющихся против потока. Поскольку для выбранной формы колебаний траектории отличаются друг от друга только начальной точкой, а направления их движения совпадают, изменение амплитуды после цикла отражений и условие (3.1) не зависят от траектории, а определяются только формой колебаний.

Рассмотрим влияние параметров на флаттер пластины.

Пусть заданы  $M$ ,  $M_w$ ,  $D$ ,  $\mu$ . Найдем условие, при котором всякая пластина (любых размеров) будет находиться в области устойчивости. Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы  $c_0 > M \cos \alpha - 1$  для любых  $k_x$ ,  $k_y$ . Замечая, что из (2.1) и (2.2)  $c_0 =$

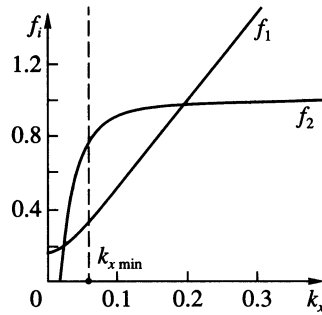
$= \sqrt{D(k_x^2 + k_y^2) + M_w^2}$ , а  $\cos \alpha = k_x / \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ , запишем это неравенство в виде

$$\sqrt{D(k_x^2 + k_y^2) + M_w^2} > M \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} - 1 \quad (3.2)$$

Так как допустимые значения  $k_x$ ,  $k_y$  произвольны, получаем искомую область значений параметров:

$$M_w > M - 1$$

Рассмотрим ту же задачу при условии, что допустимые размеры пластины  $L_x$ ,  $L_y$  ограничены сверху. В этом случае допустимые значения  $k_x$ ,  $k_y$  ограничены снизу.



Фиг. 5. Графики функций  $f_{1,2}(k_x)$  для параметров  $M = 2, D = 23.9, M_w = 0, k_{y \min} = 0.031$ . Эти значения соответствуют обтеканию стальной шарнирно опертой пластины воздухом при нормальных условиях и ограничениях  $L_x < 50, L_y < 100$

Ясно, что в неравенстве (3.2) достаточно рассматривать  $k_y = k_{y \min}$ . Рассмотрим функции

$$f_1(k_x) = \sqrt{D(k_x^2 + k_{y \min}^2) + M_w^2}, \quad f_2(k_x) = M \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_{y \min}^2}} - 1$$

Обе функции монотонно увеличиваются при увеличении  $k_x$ ,  $f_1$  выпукла вниз,  $f_2$  выпукла вверх и ограничена значением  $M - 1$ . Вид графиков этих функций изображен на фиг. 5. Искомую область значений параметров определяет следующее условие: или графики функций  $f_1$  и  $f_2$  не пересекаются, или пересекаются, но обе точки пересечения лежат левее значения  $k_{x \min}$ . В частности, видно, что при параметрах, соответствующих фиг. 5, можно подобрать пластину, удовлетворяющую заданным ограничениям на размер и находящуюся в области флаттера.

Отметим одно свойство наиболее быстро растущей формы колебаний пластины. В случае, когда поток параллелен оси  $x$ , выражение (2.6) для показателя роста принимает вид

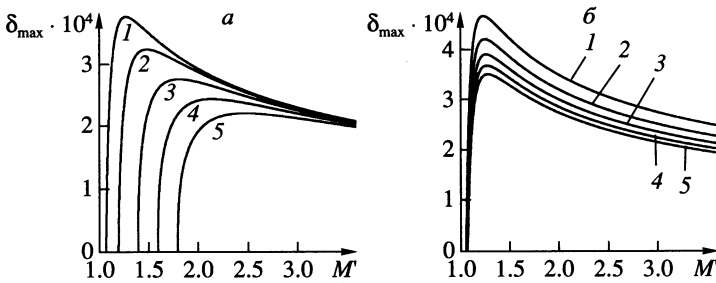
$$\delta = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial k_0}{\partial \omega} \right)^{-1} \text{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3)) \tag{3.3}$$

Быстрее остальных растут те собственные функции, для которых фазовая скорость бегущих по потоку волн  $c_0 = M \cos \alpha - 1$ . Подставляя в (3.3) выражения (2.3) и (2.4) для  $\Delta(k_3)$  и  $\Delta(k_1)$ , получаем

$$\begin{aligned} \delta_{\max}(M, M_w, D, \mu, \alpha) &= \delta_{\max}(M', M_w, D, \mu) = \\ &= \mu \frac{2^{2/3} \sqrt{3}}{8} \left( \frac{(M' - 1)^2 - M_w^2}{D} \right)^{1/6} \frac{(2(M' - 1)^2 - M_w^2)^{1/3}}{(M' - 1)^{4/3}} - \mu \frac{(2M' - 1)^2}{4(M' - 1) \sqrt{(2M' - 1)^2 - 1}} \end{aligned}$$

где  $M' = M \cos \alpha$ , здесь  $\alpha$  – положительный острый угол между вектором скорости газа и волновыми векторами бегущих по потоку волн.

Обозначим  $\delta_{\max}^*$  наибольший инкремент, которого можно достичь на собственных функциях при заданных значениях  $M, D, M_w, \mu$  и варьируемых значениях  $L_x, L_y$ . Очевидно, что  $\delta_{\max}^* = \max_{\alpha} \delta_{\max}(M', M_w, D, \mu)$ . График  $\delta_{\max}(M')$  для некоторых характерных зна-



Фиг. 6. Графики функций  $\delta_{\max}(M)$  при  $\mu = 1.2 \cdot 10^{-4}$ ; а:  $D = 23.9$ ,  $M_w = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  (кривые 1–5); б:  $M_w = 0$ ,  $D = 10, 15, 20, 25, 30$  (кривые 1–5)

чений  $M_w$ ,  $D$ ,  $\mu$  показан на фиг. 6. Эта функция имеет единственный максимум при  $M = M_{\max}(M_w, D, \mu)$ . Тогда, если число  $M$  набегающего потока меньше, чем  $M_{\max}$ , то  $\delta_{\max}^* = \delta_{\max}(M, M_w, D, \mu)$ . Наибольшую скорость роста имеют собственные формы, для которых угол  $\alpha$  минимален, т.е. они имеют одну полуволну в направлении  $y$ . Если же  $M \geq M_{\max}$ , то  $\delta_{\max}^* = \delta_{\max}(M_{\max}, M_w, D, \mu)$ , при этом можно подобрать размеры пластины такими, что максимальный рост будет иметь форма колебаний, имеющая в направлении  $y$  несколько полуволн. Самому сильному росту будет соответствовать та форма, волновой вектор которой имеет угол  $\alpha = \arccos(M_{\max}/M)$  с осью  $x$ , а абсолютная величина которого такова, что  $c_0 = M \cos \alpha - 1 = M_{\max} - 1$ .

Аналогичное свойство было отмечено в работе [1], где рассматривалась задача о флаттере пластины, имеющей форму полосы: при  $M > M_{\max}$  плоские возмущения имеют наибольший показатель роста в случае, когда поток газа лежит не в плоскости возмущения, а повернут относительно нее на угол  $\alpha = \arccos(M_{\max}/M)$ .

**4. Вектор скорости не параллелен сторонам пластины.** В этом случае  $\Delta(k_1) \neq \Delta(k_2)$ ,  $\Delta(k_3) \neq \Delta(k_4)$ , поэтому для траекторий, выпущенных из разных точек пластины в одинаковом направлении, показатели усиления амплитуды (2.6), вообще говоря, неодинаковы, поскольку неодинаковы расстояния  $l_j$ . Так как направление, в котором выпускается траектория, определяется формой колебаний, свободным параметром, определяющим ту или иную траекторию, является точка на передней кромке, из которой выпускается траектория.

Все траектории можно разделить на три группы – замкнутые траектории, симметричные относительно оси  $x$  или  $y$ , замкнутые траектории, несимметричные относительно осей  $x$  и  $y$  (в этом случае они симметричны относительно центра пластины), и незамкнутые траектории (фиг. 4).

Рассмотрим случай замкнутых симметричных траекторий, для определенности, относительно оси  $x$ . Для них всегда  $l_1 = l_4$ ,  $l_2 = l_3$ . Поскольку для любых замкнутых траекторий  $l_1 = l_3$ ,  $l_2 = l_4$ , расстояния, проходимые возмущением во всех четырех направлениях, равны. Так как общая длина траектории не зависит от начальной точки, из которой была выпущена траектория, то усиление возмущения (2.6) также не зависит от этой точки и увеличение амплитуды колебаний происходит равномерно по пластине.

Теперь рассмотрим замкнутые несимметричные траектории. Легко видеть, что в этом случае коэффициенты усиления для траекторий, выпущенных из разных точек, будут разными. Экстремальны траектории, выпущенные из угловых точек; таких траекторий две – они соединяют противоположные углы пластины. На одной из них, которую будем называть максимальной траекторией, возмущение усиливается быстрее все-



го, на другой – медленнее всего. Отсюда следует, что усиление амплитуды колебаний пластины происходит неравномерно по пластине: быстрее всего колебание усиливается в точках, близких к максимальной траектории. Этот эффект выражен тем сильнее, чем больше различаются расстояния  $l_1$  и  $l_2$  (т.е. чем меньше отражений происходит за один цикл). В частности, наибольшую выраженность он имеет в случае, когда максимальная траектория является диагональю прямоугольника (фиг. 4, б), при этом  $l_2 = 0$ . Следует ожидать, что этот эффект сохранится и в нелинейной постановке – амплитуда установившихся колебаний пластины будет иметь выпученность вокруг максимальной траектории и этим будет отличаться от формы собственных колебаний пластины в вакууме.

Перейдем к случаю незамкнутых траекторий. После большого числа отражений расстояния, пройденные возмущением во всех четырех направлениях, приближенно равны, и колебания пластины усиливаются равномерно по пластине, как в случае замкнутых симметричных траекторий. При этом, если направление траектории близко к направлению замкнутой несимметричной траектории, в течение нескольких первых циклов отражений сами траектории будут также близки, и наибольший рост будет происходить в точках, близких к максимальной замкнутой траектории. По мере увеличения числа отражений и удаления незамкнутой траектории от замкнутой, амплитуды в других точках пластины будут увеличиваться, и постепенно рост колебаний пластины станет равномерным.

**Заключение.** Исследована устойчивость высокочастотных возмущений прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Получено условие, позволяющее для каждой формы колебаний пластины определить, является она растущей или затухающей.

В случае, когда поток параллелен одной из сторон пластины, колебание растет или затухает равномерно по пластине – форма колебаний при флаттере при этом не искажается. В случае потока, непараллельного кромкам, и формы колебаний, которой соответствует замкнутая несимметричная траектория распространения возмущения или близкая незамкнутая траектория, форма колебаний изменяется: около максимальной траектории амплитуда колебаний больше, чем в других точках пластины. Остальные формы колебаний под действием газа не искажаются.

Работа поддержана грантом РФФИ № 05-01-00219 и грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-1697.2003.1.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веденев В.В. Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 155–169.
2. Веденев В.В. О высокочастотном флаттере пластины // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 163–172.
3. Куликовский А.Г. Об устойчивости однородных состояний // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148–153.
4. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
5. Куликовский А.Г. О глобальной неустойчивости однородных течений в неоднородных областях // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 257–263.
6. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980. 408 с.