

УДК 533.6.013.42

© 2010 г. В. В. ВЕДЕНЕЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМОДОВОГО ФЛАТТЕРА  
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННОГО УСИЛЕНИЯ  
СОБСТВЕННОЙ МОДЫ ВДОЛЬ ПЛАСТИНЫ

В работе [1] был исследован одномодовый (высокочастотный) флаттер пластины в случае, когда собственным модам в пустоте соответствуют симметричные траектории распространения возмущений по пластине. В случае несимметричных траекторий возникало препятствие: усиление колебаний, создаваемое потоком, оказывается разным в разных точках пластины, и необходимо учитывать “расплывание” собственной функции под действием сил упругости. В настоящей работе подробно рассматривается этот случай.

*Ключевые слова:* панельный флаттер, флаттер пластины, высокочастотный флаттер, одномодовый флаттер, флаттер с одной степенью свободы.

**1. Постановка задачи.** Тонкая упругая изотропно растянутая пластина, имеющая форму прямоугольника, с одной стороны обтекается однородным сверхзвуковым потоком невязкого совершенного газа, а с другой стороны от нее поддерживается постоянное давление, равное невозмущенному давлению газа. Пластина вмонтирована в абсолютно жесткую плоскость, отделяющую поток от области постоянного давления. Исследуется устойчивость системы в предположении, что влияние газа на колебания пластины мало.

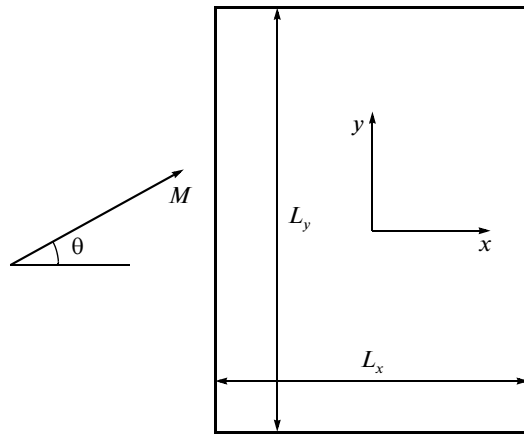
Введем систему координат  $x, y, z$ , как показано на фиг. 1. Газ течет в области  $z > 0$  под углом  $\theta$  к оси  $x$ , пластина лежит в области  $W: |x| < L_x/2, |y| < L_y/2, z = 0$ . Ширина и длина пластины  $L_x$  и  $L_y$  считаются обезразмеренными на ее толщину. Кроме них в задаче имеются следующие безразмерные параметры:

$$M = \frac{u}{a}, \quad M_w = \frac{\sqrt{\sigma / \rho_m}}{a}, \quad D = \frac{D_w}{a^2 \rho_m h^3}, \quad \mu = \frac{\rho}{\rho_m}$$

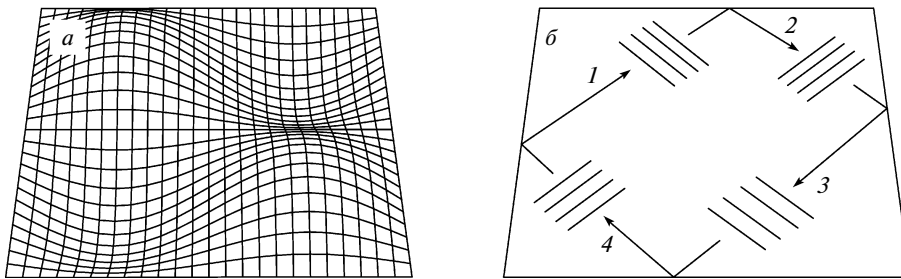
Величины  $u$ ,  $a$  и  $\rho$  – скорость течения, скорость звука и плотность газа,  $\sigma$  – растягивающее напряжение в срединной плоскости пластины,  $\rho_m$  и  $h$  – плотность материала и толщина пластины,  $D_w = Eh^3/(12(1-\nu^2))$  – ее изгибная жесткость. Будем считать, что  $M > 1$ ,  $\mu \ll 1$ . Также будем предполагать, что  $L_x \gg 1$ ,  $L_y \gg 1$ . Дифференциальные уравнения и граничные условия приведены в [1].

**2. Результаты предыдущих исследований.** Приведем основные результаты работы [1]. Рассмотрим форму колебаний пластины в вакууме, характеризуемую числами полуволн  $m$  и  $n$  в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно. Вдали от кромок пластины ее можно представить в виде (фиг. 2, а)

$$w(x, y, t) = \cos(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) e^{-i\omega_0 t} \quad (2.1)$$



Фиг. 1. Пластина, обтекаемая потоком газа



Фиг. 2. Собственная мода пластины в вакууме (а) и ее представление в виде суперпозиции бегущих волн (б)

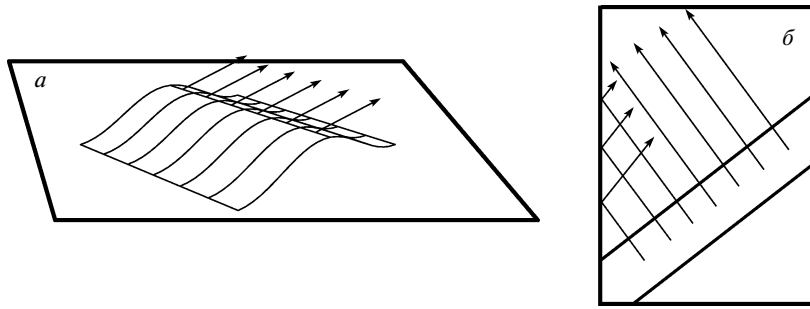
Здесь  $w$  – прогиб пластины,  $\omega_0 \in \mathbf{R}$  – частота колебаний,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  – волновые числа и сдвиги фаз, зависящие от числа полуволн  $m$  и  $n$ , граничных условий, размеров и свойств пластины. Волновые числа связаны с частотой дисперсионным уравнением

$$Dk_0^4 + M_w^2 k_0^2 - \omega_0^2 = 0, \quad k_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (2.2)$$

Представим форму колебаний (2.1) в виде суперпозиции четырех бегущих волн

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \frac{1}{4} (e^{i\varphi_x} e^{ik_x x} + e^{-i\varphi_x} e^{-ik_x x}) (e^{i\varphi_y} e^{ik_y y} + e^{-i\varphi_y} e^{-ik_y y}) e^{-i\omega_0 t} = \\ &= C_1 e^{i(k_x x + k_y y - \omega_0 t)} + C_2 e^{i(k_x x - k_y y - \omega_0 t)} + C_3 e^{i(-k_x x - k_y y - \omega_0 t)} + C_4 e^{i(-k_x x + k_y y - \omega_0 t)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пронумеруем направления распространения волн соответственно номеру слагаемого в (2.3) (фиг. 2, б). Тогда образование стоячей волны можно представить следующим образом. На одной из кромок возбуждается бегущая волна, движущаяся, например, в направлении 1. Последовательно отражаясь от четырех кромок пластины, она превращается в волны, движущиеся в направлениях 2, 3, 4. При последнем отражении она превращается в исходную волну, после чего процесс циклически повторяется. После нескольких таких циклов движение четырех указанных волн приобретает установившийся характер, а их наложение приводит к образованию стоячей волны.



Фиг. 3. Движение волны как движение ее отдельных участков

Пусть теперь пластина обтекается газом. Будем пренебрегать влиянием кромок пластины на возмущение потока газа и считать, что поток действует на бегущие волны (2.3) так, как если бы они имели бесконечный размах. Воздействие потока на плоские волны исследовалось в [2, 3] и также описано в [1]. Дисперсионное уравнение системы пластина-газ имеет вид

$$(Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2) - \mu \frac{(\omega - Mk \cos \alpha_j)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk \cos \alpha_j)^2}} = 0 \quad (2.4)$$

Здесь  $\alpha_j$  – угол между вектором скорости потока и волновым вектором,  $j = 1 \dots 4$ . Считая  $\mu$  малым параметром, полагая  $\omega = \omega_0 + \Omega_{loc}$ ,  $|\Omega_{loc}| \ll \omega_0$  и разрешая (2.4) относительно  $k$ , получаем

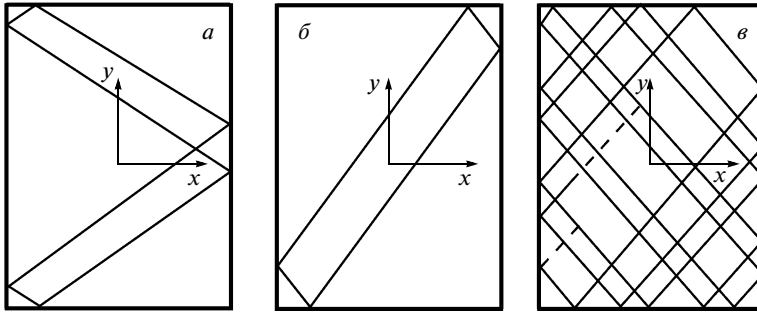
$$k = k_0 + \Delta(k_0) + g^{-1}(\omega_0) \Omega_{loc} \quad (2.5)$$

где  $\Delta(k_0)$  – главный член разложения  $k(\mu)$  при малых  $\mu$ ,  $g(\omega_0) = \partial \omega_0 / \partial k_0$  – групповая скорость волн, производная берется в силу соотношения (2.2).

Рассмотрим действие газа на собственное колебание, представляя его как описанную последовательность отражений бегущих волн. Для этого удобно представлять движение волны как движение ее отдельных участков (фиг. 3). Траектории этих участков между кромками являются отрезками прямых линий, имеющих одно из четырех направлений (фиг. 2, б), а от кромок происходит зеркальное отражение. В зависимости от рассматриваемой формы колебаний траектории могут быть замкнутыми (фиг. 4, а, б) и незамкнутыми (фиг. 4, в). Замкнутая траектория является замкнутой ломаной. Незамкнутая траектория является всюду плотной в прямоугольнике, очерчиваемом контуром пластины.

Будем называть циклом отражений участков волны период времени, за который их траектории вернуться в начальные точки (в случае замкнутой траектории) или близко к ним (в случае незамкнутой). Цикл отражений участков волны в общем случае не совпадает с циклом отражений волн как целого, показанным на фиг. 2, б, и всегда состоящим из четырех отражений. Действительно, после четырех отражений каждый участок волны может отразиться не в себя, а в другой участок, и отражения таких участков не будет представлять из себя замкнутый цикл.

Рассмотрим какую-нибудь траекторию и вычислим изменение амплитуды за цикл отражений. Оно происходит, во-первых, при движении волны от одной кромки до другой из-за наличия мнимой части волнового числа (2.5) (движение вдоль звеньев траектории, ненулевая мнимая часть возникает благодаря действию потока на волну),



Фиг. 4. Траектории движения участков волны: замкнутые, симметричные относительно одной из осей (а), замкнутые, несимметричные относительно осей (б), незамкнутые (в)

и во-вторых, при отражениях на краях пластины. Полагая начальную амплитуду равной единице и рассматривая последовательно изменения амплитуды при движении между краями и при отражениях, получаем амплитуду после цикла отражений (считается, что за указанный промежуток времени произошло  $n$  отражений)

$$\prod_{p=1}^n A_p \exp(-l_1 \operatorname{Im} \Delta(k_1) - l_2 \operatorname{Im} \Delta(k_2) - l_3 \operatorname{Im} \Delta(k_3) - l_4 \operatorname{Im} \Delta(k_4))$$

Здесь  $A_j$  – коэффициенты отражения на краях,  $l_j$  – суммарные расстояния, проходимые траекторией вдоль  $j$ -го направления,  $\Delta(k_j)$  – добавки волновых чисел, возникающие из-за влияния потока на бегущие по пластине волны [1]. Так как в отсутствие газа амплитуда после цикла отражений не меняется (поскольку пластина сама по себе – консервативная система), то

$$\prod_{p=1}^n A_p = 1$$

Далее, очевидно, что  $l_1 = l_3$ ,  $l_2 = l_4$  (в случае незамкнутой траектории эти равенства верны приближенно). Поэтому окончательно амплитуда после цикла отражений принимает вид

$$\exp(-l_1 \operatorname{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3)) - l_2 \operatorname{Im}(\Delta(k_2) + \Delta(k_4))) \quad (2.6)$$

Если показатель экспоненты положителен, то после каждого цикла отражений происходит увеличение амплитуды колебаний, т.е. эта мода является растущей. Если же показатель отрицателен, то мода является затухающей. Эта величина связана с временным показателем роста на заданной траектории  $\operatorname{Im} \Omega_{\text{loc}}$  следующим образом [4]:

$$\operatorname{Im} \Omega_{\text{loc}} = -g(\omega_0) \frac{l_1 \operatorname{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3)) + l_2 \operatorname{Im}(\Delta(k_2) + \Delta(k_4))}{2(l_1 + l_2)} \quad (2.7)$$

Знак  $\operatorname{Im} \Omega_{\text{loc}}$  позволяет определить наличие или отсутствие роста амплитуды для каждой траектории заданной формы колебаний. Если на разных траекториях изменение амплитуды одинаково (т.е.  $\operatorname{Im} \Omega_{\text{loc}}$  одинаково), то плоская волна остается плос-

кой, форма колебаний не меняется, а  $\omega = \omega_0 + \Omega_{loc}$  есть собственная частота колебаний пластины в потоке. Критерием устойчивости при этом является условие

$$\text{Im}\Omega_{loc} < 0 \quad (2.8)$$

Этот случай был полностью исследован в [1].

Если же на разных траекториях  $\text{Im}\Omega_{loc}$  различно, то на соседних участках волны амплитуда меняется по-разному, плоская волна перестанет быть таковой, и рассуждения, проведенные выше, теряют силу. В этом случае, помимо движения участков волн вдоль траекторий, происходит “расплывание” собственной функции в направлении, перпендикулярном траекториям. Собственная функция, которая выработается в результате этого расплывания, может сильно отличаться от исходной. Тем не менее, выводы об устойчивости можно сделать и в этом случае: если на всех траекториях  $\text{Im}\Omega_{loc} > 0$ , то колебание пластины усиливается, если же на всех траекториях  $\text{Im}\Omega_{loc} < 0$ , то колебание затухает. В случае, если  $\text{Im}\Omega_{loc}$  меняет знак, то априори нельзя сказать, затухающая или растущая собственная функция выработается в результате процесса дифракции (расплывания) возмущений поперек траекторий. Настоящая работа посвящена исследованию всех этих случаев.

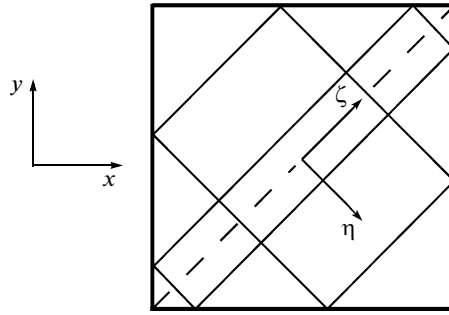
Предварительно рассмотрим условия, определяющие, зависит ли значение (2.7) от траектории или нет. Будем рассматривать только случай “косого” натекания, так как при потоке, перпендикулярном одной из кромок,  $\Delta(k_1) = \Delta(k_2)$ ,  $\Delta(k_3) = \Delta(k_4)$ ,  $\text{Im}\Omega_{loc}$  одинаково на всех траекториях данной собственной моды, и работает критерий устойчивости (2.8).

Все траектории можно разделить на три группы – замкнутые траектории, симметричные относительно оси  $x$  или  $y$ , замкнутые траектории, несимметричные относительно осей  $x$  и  $y$  (в этом случае они симметричны относительно центра пластины), и незамкнутые траектории (фиг. 4). Случай незамкнутых траекторий здесь не рассматривается.

Рассмотрим случай замкнутых симметричных траекторий, например относительно оси  $x$ . Для них всегда  $l_1 = l_4$ ,  $l_2 = l_3$ . Учитывая, что для любых замкнутых траекторий  $l_1 = l_3$ ,  $l_2 = l_4$ , то расстояния, проходимые возмущением во всех четырех направлениях, равны. Так как общая длина траектории не зависит от начальной точки, из которой была выпущена траектория, то усиление возмущения (2.7) также не зависит от этой точки, и увеличение амплитуды колебаний происходит равномерно по пластине. Этот случай исследован и приводит к (2.8).

Теперь рассмотрим замкнутые несимметричные траектории. В этом случае коэффициенты усиления для траекторий, выпущенных из разных точек, будут разными. Экстремальными являются траектории, выпущенные из угловых точек; таких траекторий две – они соединяют противоположные углы пластины. На одной из них, которую будем называть “максимальной” траекторией, возмущение усиливается быстрее всего, на другой – медленнее всего. Отсюда следует, что усиление амплитуды колебаний пластины происходит неравномерно по пластине: быстрее всего колебание усиливается в точках, близких к максимальной траектории. Этот эффект выражен тем сильнее, чем больше отличаются расстояния  $l_1$  и  $l_2$  (т.е. чем меньше отражений происходит за один цикл). В частности, он наиболее выражен в случае, когда максимальная траектория – диагональ прямоугольника (фиг. 4, б), при этом  $l_2 = 0$ . Таким образом, в случае замкнутых несимметричных траекторий критерий (2.8) не работает, и необходимо рассмотреть механизм расплывания возмущений в направлениях, перпендикулярных траекториям.

**3. Вывод основного уравнения.** Для простоты сначала рассмотрим случай квадратной пластины с собственной модой, которой соответствуют траектории с направлениями,



Фиг. 5. Траектории и система координат  $(\xi, \eta)$  в случае максимальной траектории, соединяющей противоположные углы пластины (штриховая линия)

параллельными диагоналям. Введем систему координат  $(\xi, \eta)$ , как показано на фиг. 5. В этих координатах

$$l_1 = 2(\eta_{\max} - |\eta|), \quad l_2 = 2|\eta|$$

где  $\eta_{\max}$  — половина длины диагонали квадрата. Каждая траектория определяется заданием одной из координат, например,  $\eta$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{Im}\Omega_{\text{loc}}(\eta) &= -g(\omega_0) \frac{l_1(\eta)\text{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3)) + l_2(\eta)\text{Im}(\Delta(k_2) + \Delta(k_4))}{4\eta_{\max}} = \\ &= -\frac{g(\omega_0)}{2}\text{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3)) + |\eta| \frac{g(\omega_0)}{2\eta_{\max}}\text{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3) - \Delta(k_2) - \Delta(k_4)) \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Omega_{\text{loc}}(\eta) = c_1|\eta| + c_2 \quad (3.1)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что диагональ  $\eta = 0$  является максимальной траекторией. Тогда

$$\text{Im}c_1 = \frac{g(\omega_0)}{2\eta_{\max}}\text{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3) - \Delta(k_2) - \Delta(k_4)) < 0 \quad (3.2)$$

$$\text{Im}c_2 = -\frac{g(\omega_0)}{2}\text{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3)) > 0$$

Рассмотрим уравнение колебаний пластины в потоке газа

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right) - M_w^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) - \omega^2 w + p(w, \omega) = 0$$

Так как по предположению наибольшее усиление происходит на диагонали пластины, а волновой вектор ориентирован также вдоль этой диагонали, предположим, что собственная функция существенно отлична от нуля лишь в окрестности максимальной траектории, и будем искать решение в виде

$$w(\xi, \eta, t) = \sin(k_0 \xi + \varphi) A(\eta) e^{-i\omega t}, \quad k_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.3)$$

Ясно, что оно удовлетворяет граничным условиям в углах пластины лишь “интегрально”, а не точно, поэтому будем рассматривать точки пластины, лежащие вне некоторой окрестности углов. Подставляя (3.3) в уравнение движения, получаем

$$\sin(k_0\xi + \varphi) \left( D \frac{d^4 A(\eta)}{d\eta^4} - (2Dk_0^2 + M_w^2) \frac{d^2 A(\eta)}{d\eta^2} + (Dk_0^4 + M_w^2 k_0^2 - \omega^2) A(\eta) \right) + p(\sin(k_0\xi + \varphi) A(\eta), \omega) = 0 \quad (3.4)$$

Сделаем основное предположение. Будем считать, что давление  $p(\sin(k_0\xi + \varphi) A(\eta), \omega)$  вычисляется так же, как если бы  $A(\eta) \equiv \text{const}$ . Физически это означает, что “расплывание” собственной формы происходит только за счет упругих сил, возникающих в пластине, а не за счет потока. Рассмотрим (3.4) при  $A(\eta) \equiv \text{const}$ , положив производные по  $\eta$  равными нулю, и сравним полученное уравнение с дисперсионным уравнением на траектории с заданным  $\eta$ , в котором член с давлением осредним вдоль траектории

$$Dk_0^4 + M_w^2 k_0^2 - \omega^2 + \alpha(k_0, \omega, \eta) = 0 \quad (3.5)$$

Здесь  $\alpha(k_0, \omega, \eta)$  – соответствующие члены уравнения (2.4), осредненные на траектории

$$\alpha(k_0, \omega, \eta) = -\frac{\mu}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4} \sum_{j=1..4} l_j(\eta) \frac{(\omega - Mk_0 \cos \alpha_j)^2}{\sqrt{k_0^2 - (\omega - Mk_0 \cos \alpha_j)^2}}$$

Уравнение (3.5) может рассматриваться как осредненное дисперсионное уравнение вдоль всей траектории (настоящие дисперсионные уравнения (2.4), конечно, свои для каждой из четырех волн). Сравнивая почленно (3.5) и (3.4), получаем

$$p(\sin(k_0\xi + \varphi) A(\eta), \omega) = \alpha(k_0, \omega, \eta) A(\eta) \sin(k_0\xi + \varphi) \quad (3.6)$$

где  $\alpha(k_0, \omega, \eta)$  находится “методом траекторий”, при этом берется траектория, выпущенная из точки с данным значением  $\eta$ . Свяжем теперь  $\alpha$  с “локальным” усилением на траектории. Пусть “локальная” частота на траектории  $\omega = \omega_0 + \Omega_{\text{loc}}(\eta)$ ,  $|\Omega_{\text{loc}}(\eta)| \ll \omega_0$ . Тогда уравнение (3.5) при фиксированном  $\eta$  преобразовывается так

$$Dk_0^4 + M_w^2 k_0^2 - (\omega_0 + \Omega_{\text{loc}}(\eta))^2 + \alpha(k_0, \omega_0 + \Omega_{\text{loc}}(\eta), \eta) = 0 \quad (3.7)$$

Пользуясь (2.2) и малостью  $\Omega_{\text{loc}}(\eta)$ , получаем

$$\alpha(k_0, \omega_0 + \Omega_{\text{loc}}(\eta), \eta) = 2\omega_0 \Omega_{\text{loc}}(\eta) \quad (3.8)$$

Вернемся к уравнению (3.4), учитывающему расплывание возмущения за счет упругих сил. Полагая собственную частоту также мало отличающейся от частоты колебаний в вакууме,  $\omega = \omega_0 + \Omega$ ,  $|\Omega| \ll \omega_0$ , и подставляя выражение  $\alpha$  в (3.4), получаем

$$D \frac{d^4 A(\eta)}{d\eta^4} - (2Dk_0^2 + M_w^2) \frac{d^2 A(\eta)}{d\eta^2} - 2\omega_0(\Omega - \Omega_{\text{loc}}(\eta)) A(\eta) = 0 \quad (3.9)$$

Это – основная задача на собственные значения, которая далее будет исследоваться.

**4. Решение задачи на собственные значения.** Будем рассматривать собственные функции, имеющие достаточно большое число волн прогиба, т.е. будем считать  $k_0 \gg 1$ . Тогда

$$\varepsilon \frac{d^4 A(\eta)}{d\eta^4} - \frac{d^2 A(\eta)}{d\eta^2} - q(\Omega - \Omega_{\text{loc}}(\eta)) A(\eta) = 0 \quad (4.1)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2Dk_0^2 + M_w^2} \ll 1, \quad q = \frac{2\omega_0}{2Dk_0^2 + M_w^2}, \quad 0 < q < \frac{1}{\sqrt{D}}$$

Согласно общим свойствам поведения решений уравнений с малым параметром при старшей производной решения (4.1) разбиваются на два типа. Первые при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремятся к решениям предельного уравнения

$$\frac{d^2 A(\eta)}{d\eta^2} + q(\Omega - \Omega_{\text{loc}}(\eta))A(\eta) = 0 \quad (4.2)$$

Поскольку предельное уравнение имеет более низкий порядок, его решения удовлетворяют меньшему числу граничных условий. Поэтому у решений (4.1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в окрестности границ области образуется “пограничный слой” – переходная область, в которой решение резко меняется для удовлетворения граничных условий, “лишних” с точки зрения уравнения (4.2).

Решения второго типа при  $\varepsilon \rightarrow 0$  являются быстро меняющимися функциями (быстро осциллирующими или быстро затухающими), для поиска которых можно использовать метод ВКБ. Рассмотрим локальное дисперсионное уравнение, соответствующее (4.1): “заморозим” непостоянный коэффициент последнего слагаемого и подставим в (4.1) решение вида  $A(\eta) = e^{is\eta}$ . Получим

$$\varepsilon s^4 - s^2 - q(\Omega - \Omega_{\text{loc}}(\eta)) = 0 \quad (4.3)$$

Два решения (4.3), соответствующие ВКБ-приближению (другие два соответствуют приближению (4.2)), имеют вид

$$s_{1,2}(\eta) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4q\varepsilon(\Omega - \Omega_{\text{loc}}(\eta))}}{2\varepsilon}$$

Решения (4.1) типа ВКБ выглядят так

$$A(\eta) = C_{1,2}(\eta) \exp\left(i \int s_{1,2}(\eta) d\eta\right) \quad (4.4)$$

где  $C_f(\eta)$  – медленно меняющиеся функции. Как видно, (4.4) являются функциями, быстро затухающими при удалении от кромок пластины. Для построения собственной функции в центральной области пластины (т.е. за исключением некоторой окрестности кромок) частные решения (4.4) можно не учитывать.

Таким образом, далее будем рассматривать уравнение (4.2). В силу (3.1) оно переписывается так

$$\frac{d^2 A(\eta)}{d\eta^2} + q(\Omega - c_1|\eta| - c_2)A(\eta) = 0 \quad (4.5)$$

Рассмотрим область  $\eta > 0$ , в которой  $|\eta| = \eta$ . Сделаем замену переменной:  $\zeta = q^{1/3} c_1^{-2/3} (c_1 \eta + c_2 - \Omega)$ , считая, что  $-\pi/3 < \arg c_1^{1/3} < \pi/3$ . Тогда (4.5) переписывается в виде

$$\frac{d^2 A(\zeta)}{d\zeta^2} - \zeta A(\zeta) = 0 \quad (4.6)$$

Это – уравнение Эйри. Оно имеет два независимых решения, одно из которых, функция Эйри  $\text{Ai}(\zeta)$ , стремится к нулю при  $|\zeta| \rightarrow \infty$  в секторе  $-\pi/3 < \arg \zeta < \pi/3$  (что соответствует вещественным  $\eta \rightarrow +\infty$ ). Второе решение, функция Эйри второго рода  $\text{Bi}(\zeta)$  стремится к бесконечности при  $|\zeta| \rightarrow \infty$  в указанном секторе и очевидно не подходит по смыслу задачи. Таким образом, при  $\eta > 0$



$$A(\eta) = \text{Ai} \left( \left( \frac{q}{c_1^2} \right)^{1/3} (c_1 \eta + c_2 - \Omega) \right)$$

Для получения решения при  $\eta < 0$  в силу симметрии уравнения (4.2) нужно положить  $A(\eta) = A(-\eta)$ . При этом обеспечивается непрерывность  $A(\eta)$  и всех ее четных производных в нуле. Для непрерывности первой и всех остальных нечетных производных (т.е. для существования решения (4.5) при всех  $\eta$ ) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\left. \frac{dA(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\text{Ai}(z)}{dz} \right|_{z=q^{1/3}c_1^{-2/3}(c_2-\Omega)} = 0$$

Производная функции Эйри имеет счетное число нулей  $z_N$ , все они вещественны и отрицательны<sup>1</sup>. Таким образом, получаем частотное уравнение:

$$\Omega_N = c_2 - z_N \left( \frac{c_1^2}{g} \right)^{1/3}, \quad N \in \mathbf{N} \tag{4.7}$$

и собственные функции во всей области  $\eta \in \mathbf{R}$

$$A_N(\eta) = \text{Ai}(q^{1/3}c_1^{1/3}|\eta| + z_N) \tag{4.8}$$

Значения первых двух  $z_N$  находятся численно, остальные можно найти, используя асимптотическое поведение функции Эйри

$$z_1 \approx -1.019, \quad z_2 \approx -3.248, \quad z_N \approx -\left( \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi(n-1)}{2} \right)^{2/3}, \quad N > 2$$

Собственным значением с наибольшей мнимой частью является

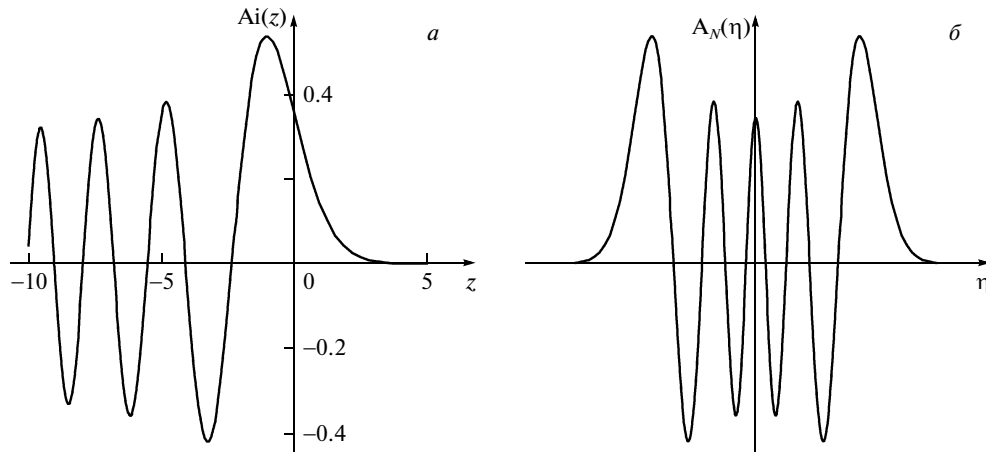
$$\Omega_1 = c_2 + 1.019 \cdot \left( \frac{c_1^2}{q} \right)^{1/3}$$

**5. Анализ решения.** Каждой рассматриваемой собственной моде колебаний пластины в вакууме соответствует счетное число собственных мод колебаний в потоке газа.

Рассмотрим структуру собственных функций (4.8). Функция Эйри  $\text{Ai}(z)$  при  $z \in \mathbf{R}$  затухает при  $z \rightarrow +\infty$  и осциллирует при  $z \rightarrow -\infty$  (фиг. 6, а). Для того чтобы получить функцию, симметричную относительно  $\eta = 0$ , нужно ее сдвинуть так, чтобы в нуле оказалась точка с горизонтальной касательной. Тогда ее отражение в левой полуплоскости, объединенное с оригиналом в правой, даст гладкую функцию при всех вещественных  $\eta$  – собственную функцию (фиг. 6, б). Функции  $|A_N(\eta)|$  монотонно стремятся к нулю при  $\eta \rightarrow \pm\infty$ ,  $|\eta| > \eta_N$  и осциллируют при  $|\eta| < \eta_N$ .

Собственные частоты (4.7) имеют мнимую часть, всегда меньшую максимального “локального” усиления вдоль максимальной траектории  $\Omega_{\text{loc}}(0)$ . Таким образом, минимальная траектория  $\xi = 0$  всегда “нейтрализует” часть усиления, возникающего в окрестности максимальной траектории. Критерием устойчивости является неравенство  $\text{Im}\Omega_1 < 0$ , т.е.

<sup>1</sup><http://dlmf.nist.gov/9/9/>



Фиг. 6. Функция Эйри вещественного аргумента (а), собственная мода  $A_N(\eta)$  (б)

$$-\frac{g(\omega_0)}{2} \operatorname{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3)) + \\ + 1.019 \left( \frac{2Dk_0^2 + M_w^2}{2\omega_0} \right)^{1/3} \left( \frac{g(\omega_0)}{2\eta_{\max}} \operatorname{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3) - \Delta(k_2) - \Delta(k_4)) \right)^{2/3} < 0$$

Среди счетного числа собственных мод (4.8), соответствующих одной собственной моде в вакууме, только конечное число мод может быть растущим. Действительно, из формулы (4.7) и неравенства  $\operatorname{Im}c_1 < 0$ , следует, что, начиная с некоторого  $N$  будет выполнено неравенство  $\operatorname{Im}\Omega_N < 0$ .

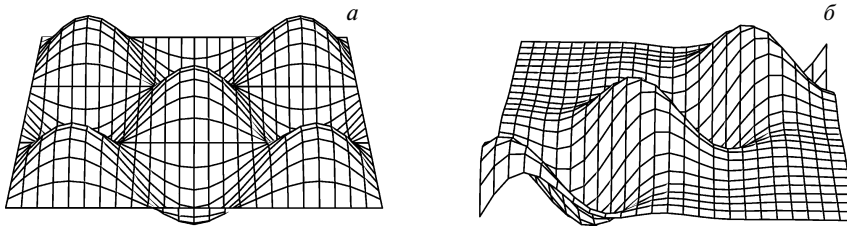
Так как по порядку величины  $c_1 \sim \mu/\eta_{\max}$  [1], для точки  $\eta_N$ , где колебательный характер сменяется затухающим, можно написать:

$$\eta_N \sim \frac{|z_N|}{(qc_1)^{1/3}} \sim |z_N| \left( \frac{\eta_{\max}}{\mu} \right)^{1/3}$$

Для корректности полученного решения нужно, чтобы  $A_N$  были малы в окрестности кромок пластины, т.е.  $\eta_N \ll \eta_{\max}$ . Считая, что  $\mu \sim 10^{-4}$ ,  $z_N \sim 1$ , получаем:  $\eta_{\max} \gtrsim 100$ , что даже при  $N = 1$  справедливо лишь при достаточно больших  $\eta_{\max}$ , т.е. для пластин больших размеров. В противном случае полученные собственные функции будут взаимодействовать с отброшенными “приграничными” решениями типа ВКБ, и собственные функции, “вырабатывающиеся” в результате такого взаимодействия, и их собственные частоты устроены сложнее.

В случае пластин очень больших размеров  $\eta_{\max} \rightarrow \infty$ ,  $c_1 \rightarrow 0$  и частоты (4.7) близки к локальной частоте вдоль максимальной траектории. Так как при этом ширина области, где перемещение отлично от нуля, мало по сравнению с шириной пластины ( $\eta_N \ll \eta_{\max}$ ), собственная функция является сконцентрированной в узкой полосе около максимальной траектории.

Отметим следующий интересный факт. Пластина в пустоте имеет счетное число собственных мод, каждая из которых имеет вид, показанный на фиг. 7, а. Рассмотрим моду, которой соответствуют замкнутые траектории, несимметричные относительно



Фиг. 7. Собственная мода пластины в вакууме (а) и в потоке (б)

осей  $x$  и  $y$ . Пусть пластина обтекается потоком перпендикулярно передней кромке. Тогда форма прогиба в потоке, соответствующая этой моде, слегка меняется: амплитуда волн усиливается у задней кромки, так как волновые вектора приобретают комплексную добавку  $\Delta(k)$ . Положение узловых линий не меняется. Частота приобретает малую комплексную добавку, т.е. эта мода становится растущей или затухающей.

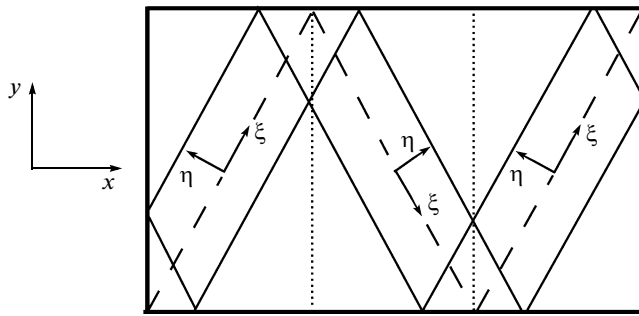
Повернем теперь вектор скорости потока так, чтобы натекание стало “косым”. Тогда эта собственная мода исчезает, а вместо нее образуется счетное число мод, сконцентрированных в окрестности максимальной траектории. Каждая из них имеет вид (3.3) (фиг. 7, б). Интересно, что  $A_N(\eta)$  при вещественных  $\eta$  – комплексные функции, и собственные моды (3.3) не являются стоячими волнами. “Физичные” решения, т.е. вещественные и мнимые части (3.3), выглядят так: от максимальной траектории расходятся бегущие волны с волновым вектором, перпендикулярным ей и направленным от нее (так как  $d \arg A_N(\eta)/d\eta > 0$  при  $\eta > 0$ ), при этом неподвижная огибающая этих волн осциллирует при  $|\eta| < |\eta_M|$  и затухает при больших  $\eta$ .

В случае, если одна из найденных собственных мод – наиболее быстро растущая среди всех мод пластины в потоке, предыдущий анализ дает критерий устойчивости и форму наиболее быстро растущего колебания. Если же существует мода другого семейства, частота которой близка к частоте одной из найденных мод, то в силу приближенной постановки исходной задачи (в части вычисления давления) точная собственная форма прогиба пластины может иметь вид комбинации приближенных форм. Частота, однако, останется той же. Таким образом, достаточным условием неустойчивости остается выражение  $\text{Im}\Omega_1 > 0$ .

**6. Общий случай.** Выше был рассмотрен случай квадратной пластины и собственной моды, которой соответствует максимальная траектория – диагональ квадрата. Все рассуждения и результаты переносятся без изменений на случай прямоугольной пластины и собственной моды, максимальная траектория которой соединяет противоположные углы пластины. Для этого необходимо ввести систему координат (фиг. 8). Она постоянна в окрестности звеньев максимальной траектории и скачком поворачивается при отражениях от кромок. Ясно, что решение, построенное в такой системе координат, не будет верным в окрестности точек отражения и углов пластины. Если размеры пластины достаточно велики, то размеры этих окрестностей будут малы по сравнению с длинами звеньев, и решение будет верным “почти” везде.

В этой системе координат можно написать выражение вида (3.1), после чего дословно повторяются выкладки, приводящие к (3.6), (3.9) и окончательно – к решению (4.7), (4.8). Единственное отличие – то, что константы  $c_1, c_2$  будут определяться конкретной модой колебаний и в общем случае будут отличны от (3.2).

**Заключение.** Изучены собственные моды колебаний пластины в сверхзвуковом потоке газа в случае, когда усиление колебаний, создаваемое потоком, различно в раз-



Фиг. 8. Траектории и система координат  $(\xi, \eta)$  в общем случае замкнутой несимметричной траектории (штриховая линия)

ных точках пластины, и необходимо учитывать эффекты “расплывания” собственной моды.

Каждой такой собственной моде пластины в вакууме соответствует счетное число собственных мод пластины в потоке. Они отличны от нуля в окрестности ломаной, соединяющей противоположные углы пластины, и затухают при достаточном удалении от нее. Найдены собственные частоты и получен критерий устойчивости. Инкремент наиболее усиливающегося колебания всегда меньше максимального локального инкремента, найденного методом “траекторий”.

Автор благодарит А.Г. Куликовского за внимание к работе и ценные обсуждения результатов.

Работа поддержана грантами РФФИ № 08-01-00618 и 10-01-00256 и грантами Президента РФ МК-2313.2009.1 и НШ-4810-2010.1.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веденеев В.В. Высокочастотный флаттер прямоугольной пластины // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 4. С. 173–181.
2. Веденеев В.В. Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2005. 5. С. 155–169.
3. Веденеев В.В. О высокочастотном флаттере пластины // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 163–172.
4. Куликовский А.Г. О глобальной неустойчивости однородных течений в неоднородных областях // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 257–263.
5. Куликовский А.Г. Об устойчивости однородных состояний // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148–153.

Москва

Поступила в редакцию  
28.1.2010