

УДК 533.6.013.42

© 2015 г. В. В. ВЕДЕНЕЕВ, С. В. ШИТОВ

ФЛАТТЕР ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОДКРЕПЛЕННОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ В ПОТОКЕ ГАЗА С МАЛОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

Во всех классических исследованиях панельного флаттера принимается, что нестационарное давление потока газа может быть вычислено по поршневой теории. Однако, поршневая теория верна лишь при больших числах Маха и не покрывает область $1 < M < 2$. Недавно было доказано, что в этом диапазоне чисел Маха существует область панельного флаттера, названного одномодовым, который отличен от “классического” флаттера связанного типа. В настоящей работе численно изучается одномодовый флаттер пластины в форме полосы, имеющей периодическое подкрепление. Построены границы устойчивости и проанализировано влияние ширины полосы и расстояния между подкреплениями.

Ключевые слова: панельный флаттер, флаттер пластины, одномодовый флаттер, флаттер с одной степенью свободы.

1. Введение. Панельный флаттер — явление самовозбуждающихся вибраций панелей обшивки летательных аппаратов, движущихся с большой скоростью. Обычно он не вызывает мгновенное разрушение панелей (как флаттер крыла), но приводит к быстрому накоплению усталостных повреждений и резко снижает срок службы панелей. Хотя панельный флаттер наблюдался на сверхзвуковых ракетах еще во время войны, первые содержательные теоретические исследования появились спустя десятилетие [1, 2]. В этих работах использовалась модель Кирхгофа—Лява движения пластины и закон плоских сечений нестационарного движения газа, приводящий к формуле поршневой теории для давления газа на пластину [3]. После работ Мовчана задача панельного флаттера была изучена во множестве усложненных постановок [4–10]. В подавляющем большинстве работ усложнению подвергалась “упругая” часть задачи: многослойные и композитные пластины, неплоские оболочки, нелинейные модели пластины и материала, в том числе вязкоупругие материалы, материалы с памятью формы или пьезоэлектрическими свойствами [11–13]. “Аэродинамическая” часть задачи оставалась неизменной: использовалась поршневая теория.

Линеаризованное нестационарное давление невязкого газа, действующее на колеблющуюся пластину, полученное из газовой динамики, имеет вид интегрального оператора от комбинации прогиба и его производной, с ядром из специальных функций (см. постановку задачи ниже). В пределе при $M \rightarrow \infty$ оно дает формулу поршневой теории, однако при числах Маха, близких к 1, ничего общего с поршневой теорией нет. Подстановка точного выражения в уравнение движения пластины приводит к интегродифференциальному уравнению на собственные значения, которое ввиду сложности математической задачи исследовалось лишь в отдельных работах. В [14] было аналитически получено общее решение этого интегродифференциального уравнения, что сводит задачу на собственные значения к алгебраической, однако последняя оказалась столь сложна, что попыток решать ее напрямую не предпринималось. В [7, 15, 16] интегродифференциальное уравнение решалось численными методами Бубнова—

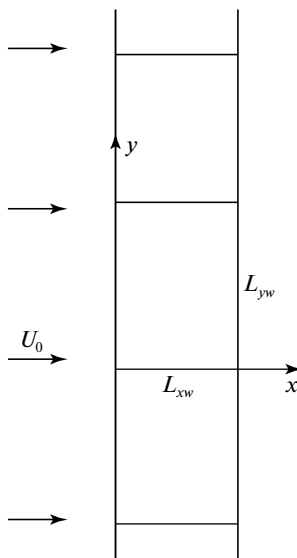
Галеркина и конечных элементов при некоторых конкретных параметрах задачи. Было отмечено, что наряду со связанным типом флаттера, который возникает при решении задачи с помощью поршневой теории, в расчетах при $1 < M < 2$ возникал также другой — одномодовый тип флаттера. Однако он объяснялся численными погрешностями и считался некоторыми авторами нефизичным.

Позже задача изучения панельного флаттера с помощью нелинейных аэродинамических моделей решалась численно в ряде работ. В [17, 18] исследовался флаттер при трансзвуковых скоростях (решались уравнения Эйлера), а в [19–22] исследовался флаттер в вязком газе (решались уравнения Навье–Стокса). В этих работах прямо исследовалась задача движения пластины во времени и разделения неустойчивого состояния на одномодовый и связанный флаттер не делалось.

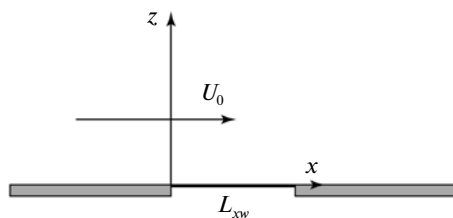
В [23] исследование панельного флаттера проводилось для пластины в форме больших размеров (двумерная задача) асимптотическим методом [24]. Было строго доказано, что одномодовый флаттер существует, был выяснен физический механизм усиления колебаний и доказано, что он не может быть обнаружен при исследовании задачи с помощью поршневой теории и вообще с помощью аэродинамических моделей, выражающих нестационарное давление на пластину через ее прогиб в виде любой дифференциальной связи. Позже [25] эта задача решалась численно, где были построены границы устойчивости шести первых собственных мод и показано, что область неустойчивости состоит из области флаттера связанного типа и областей одномодового флаттера по различным модам, причем одномодовый флаттер значительно расширяет область неустойчивости в сторону малых чисел Маха и коротких пластин. Было исследовано также влияние пограничного слоя [26], конструкционного демпфирования пластины [27], и проанализированы предельные циклы нелинейных флаттерных колебаний [28, 29]. Наконец, были проведены эксперименты [30], в которых впервые было зафиксировано возбуждение одномодового флаттера при числах Маха $1 < M < 1.3$. Таким образом, одномодовый флаттер упругой полосы (двумерная постановка) в настоящее время в значительной мере исследован.

Трехмерная задача одномодового панельного флаттера прямоугольных пластин больших размеров была исследована в [31, 32] с помощью модифицированного асимптотического метода [33]. Постановка задачи численного исследования прямоугольных пластин без дополнительного предположения о ее размерах еще более усложняется по сравнению с двумерной, поскольку в интегродифференциальном выражении для нестационарного давления, действующего на пластину, область интегрирования становится двумерной в форме треугольника [34]. Однако, этот двумерный интеграл может быть сведен к одномерному в одном частном случае — бесконечной серии прямоугольных пластин, шарнирно связанных друг с другом, или, что то же самое, в случае периодически подкрепленной упругой полосы. Такую постановку можно рассматривать как первое приближение к исследованию флаттера изолированной прямоугольной пластины. В настоящей работе эта задача решается численно модифицированным методом [25].

2. Постановка задачи. В линейном приближении исследуется устойчивость тонкой упругой бесконечной полосы, которая вмонтирована в абсолютно жесткую плоскую поверхность. Полоса обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа, с другой стороны задано постоянное давление, которое уравнивает полосу в плоском невозмущенном состоянии. Полоса имеет периодическое шарнирное подкрепление вдоль бесконечного направления; передняя и задняя кромки также шарнирно оперты (фиг. 1, 2). В силу периодичности либо все пролеты одновременно устойчивы, либо все одновременно неустойчивы, поэтому далее будем рассматривать устойчивость отдельного пролета, как элемента полосы, непосредственно взаимодействующего с соседними пролетами. Сам же отдельный пролет будем называть пластиной.



Фиг. 1



Фиг. 2

Поместим систему координат $Oxuz$ в плоскость невозмущенной полосы так, чтобы рассматриваемая отдельная пластина занимала область $0 \leq x \leq L_{xw}$, $0 \leq y \leq L_{yw}$, $z = 0$. Ось z направим перпендикулярно плоскости пластины, чтобы система координат образовывала правую тройку.

Пластина рассматривается без мембранного напряжения, но обладает изгибной жесткостью D_w , которая вместе с толщиной h и плотностью материала ρ_m считается постоянной. Колебания пластины малы (т.е. прогиб пластины считается малой величиной по сравнению с толщиной) и описываются уравнением движения Кирхгофа–Лява. Массовые силы не учитываются.

Газ считается невязким и совершенным, с плотностью ρ_0 и скоростью звука a_0 в невозмущенном состоянии. Газа поступательно течет в области $z > 0$ с постоянной сверхзвуковой скоростью U_0 , направленной вдоль оси x . Течение считается адиабатическим, пограничный слой не учитывается.

Пусть в начальный момент на пластину налагается малое возмущение. Докажем, что если набегающий из бесконечности поток газа не содержит возмущений, а сами возмущения инициируются пластиной, то возмущенное движение газа является потенциальным. Действительно, невозмущенное течение газа является потенциальным,

а действие пластины на газ эквивалентно приложению поверхностных сил, которые в силу теоремы Томсона могут вызывать только потенциальное течение. Следовательно, возмущения газа, вызванные пластиной, всегда являются потенциальными.

Пусть теперь поток также локально возмущен, и возмущение содержит вихревую часть. Согласно теореме Томсона, эта часть вморожена в частицы газа и действует на пластину как статическая нагрузка в течение конечного промежутка времени, а следовательно, не может привести к неустойчивости. Таким образом, для исследования устойчивости достаточно рассматривать только потенциальные возмущения газа.

Уравнение движения Кирхгофа–Лява тонкой упругой пластины в потоке газа и граничное условие шарнирного опирания на кромках пластины записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_m h \partial^2 w / \partial t^2 + D_w \Delta_{xy}^2 w + p &= 0, \quad 0 < x < L_{xw} \\ w = \partial^2 w / \partial x^2 &= 0, \quad x = 0, \quad L_{xw} \\ w = \partial^2 w / \partial y^2 &= 0, \quad y = 0, \quad L_{yw} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где Δ_{xy} – двумерный оператор Лапласа, $w(x, y, t)$ – прогиб пластины. Из линеаризованной теории движения газа разница давлений $p(x, y, t)$, действующая на пластину, выражается через потенциал движения газа $\varphi(x, y, z, t)$:

$$p(x, y, t) = -\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x, y, 0, t) \quad (2.2)$$

Система линеаризованных уравнений и граничных условий, описывающая развитие малых возмущений газа, имеет вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0, \quad z > 0 \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty \text{ вдоль луча } z = \frac{x - x_0}{\sqrt{M^2 - 1}} & \quad (2.3) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + U_0 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad z = 0, \quad x \in [0; L_{xw}]; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad x \notin [0; L_{xw}] \end{aligned}$$

Первое уравнение системы является волновым уравнением, где a_0 – скорость звука в газе. Второе условие, стремление $\text{grad} \varphi$ к нулю при $z \rightarrow +\infty$ вдоль характеристики $z = (x - x_0) / \sqrt{M^2 - 1}$ при фиксированном t и y , верно только для растущих со временем возмущений, порожденных вблизи пластины. Действительно, если мы зафиксируем координаты y и t и будем увеличивать z вдоль характеристики, то будем наблюдать возмущения, порожденные в предыдущие моменты времени, а так как возмущения растущие, то при обратном ходе времени они будут затухать. Третье условие в (2.3) выражает условие непротекания газа через колеблющуюся пластину и абсолютно жесткую плоскость вокруг нее.

Для перехода к безразмерным переменным в качестве размерно-независимых величин выберем величины a_0 , ρ_0 и h . Тогда имеем (безразмерные переменные обозначения с волной):

$$x = \tilde{x}h, \quad y = \tilde{y}h, \quad z = \tilde{z}h, \quad t = \tilde{t}h/a_0, \quad \varphi = \tilde{\varphi}a_0h, \quad w = \tilde{w}h$$

Далее волны над символами для краткости будем опускать, подразумевая все величины безразмерными.

Безразмерные параметры выражаются через размерные следующим образом:

$$D = \frac{D_w}{a_0^2 \rho_m h^3}, \quad L_x = \frac{L_{xw}}{h}, \quad L_y = \frac{L_{yw}}{h}, \quad M = \frac{U_0}{a_0}, \quad \mu = \frac{\rho_0}{\rho_m}$$

Здесь D , L_x , L_y – безразмерная жесткость, длина и ширина пластины, M и μ – число Маха и безразмерная плотность газа.

Устойчивость упругой пластины в потоке газа определяется поведением собственных мод, поэтому далее примем, что малые возмущения пластины и газа имеют вид

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= W(x, y)e^{-i\omega t} \\ \varphi(x, y, z, t) &= \Phi(x, y, z)e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2.4)$$

С учетом выражений (2.4) и процедуры обезразмеривания замкнутая система безразмерных уравнений для возмущений состоит из уравнения движения пластины

$$\begin{aligned} D\Delta_{xy}^2 W - \omega^2 W + P &= 0, \quad 0 < x < L_x \\ P &= -\mu(-i\omega + M\partial/\partial x)\Phi(x, y, 0) \\ W &= 0, \quad x < 0, \quad x > L_x \\ W &= \partial^2 W/\partial x^2 = 0, \quad x = 0, \quad x = L_x \\ W &= \partial^2 W/\partial y^2 = 0, \quad y = 0, \quad y = L_y \end{aligned} \quad (2.5)$$

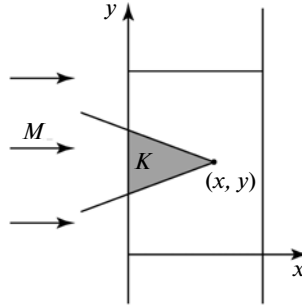
и уравнения движения газа

$$\begin{aligned} \left(-i\omega + M\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0, \quad z > 0 \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty \text{ вдоль луча } z &= \frac{x-x_0}{\sqrt{M^2-1}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= -i\omega W + M\frac{\partial W}{\partial x}, \quad z = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) для потенциала Φ решается с помощью преобразования Лапласа аналитически [34, §4.8], решение имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, 0) &= \iint_K \frac{1}{\pi} \left(-i\omega W(x_1, y_1) + M\frac{\partial W(x_1, y_1)}{\partial x_1}\right) \exp\left(\frac{i\omega M}{\beta^2}(x-x_1)\right) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 - \beta^2 y_1^2}} \cos\left(\frac{\omega}{\beta^2} \sqrt{(x-x_1)^2 - \beta^2 y_1^2}\right) dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

где K – треугольник, полученный пересечением обратного конуса Маха, выпущенного из точки (x, y) , со всей пластиной (фиг. 3), $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$.



Фиг. 3

Таким образом, уравнение движения пластины (2.5) после подстановки в него выражения (2.7) с граничными условиями шарнирного опирания представляет собой задачу на отыскание комплексных собственных значений ω . Эта задача решается численно. Отметим, что собственное значение ω входит в уравнение сложным образом; такие задачи изучались в ряде работ, например [35]. Система неустойчива в том и только в том случае, когда хотя бы одна из собственных частот ω_n лежит в верхней полуплоскости комплексной плоскости $\text{Im}\omega_n > 0$. Целью работы является построение области неустойчивости в пространстве безразмерных параметров задачи.

3. Численный метод. Задачу на отыскание собственных значений интегродифференциального уравнения движения пластины (2.5) с учетом выражения для потенциала Φ (2.7) будем решать численно методом Бубнова–Галеркина. Ниже описывается метод решения задачи, разработанный на основе [25].

Прогиб пластины $W(x, y)$ будем представлять в виде суперпозиции базисных функций, в качестве которых берутся формы колебания пластины в пустоте:

$$W(x, y) = \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} C_l^k \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{L_y}\right) = \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} C_l^k W_k(x) W^l(y) \quad (3.1)$$

где C_l^k – неизвестные постоянные коэффициенты. Базисные функции можно представить в виде таблицы размером N_x на N_y (таблица) так, что номеру столбца будет соответствовать номер базисной функции по x , а номеру строки – номер по y .

Пронумеруем их следующим образом:

$$T_{(l-1)N_x+k}(x, y) = W_k(x) W^l(y)$$

	1	2	3	...	N_x
1	$W_1(x)W^1(y)$	$W_2(x)W^1(y)$	$W_3(x)W^1(y)$...	$W_{N_x}(x)W^1(y)$
2	$W_1(x)W^2(y)$	$W_2(x)W^2(y)$	$W_3(x)W^2(y)$...	$W_{N_x}(x)W^2(y)$
3
...
N_y	$W_1(x)W^{N_y}(y)$	$W_2(x)W^{N_y}(y)$	$W_3(x)W^{N_y}(y)$...	$W_{N_x}(x)W^{N_y}(y)$

Сумма (3.1) переписывается в виде

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^N C_m T_m(x, y), \quad T_m(x, y) = W_k(x) W^l(y), \quad C_m = C_l^k \quad (3.2)$$

где $N = N_x N_y$. По номеру m можно восстановить номера k и l :

$$l = \left[\frac{m-1}{N_x} \right] + 1, \quad k = m - N_x(l-1) \quad (3.3)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть. Далее, подставим сумму (3.2) в уравнение движения пластины (2.5). Умножая его последовательно на $(2/L_y)T_n(x, y)$, $n = 1 \dots N$, и интегрируя по x от 0 до L_x и по y от 0 до L_y , получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно комплексных коэффициентов C_m с матрицей $A(\omega)$:

$$A(\omega) = K - \frac{L_x \omega^2}{2} E + P(\omega) \quad (3.4)$$

Здесь E – единичная матрица, K – диагональная матрица жесткости, отвечающая за свойства пластины. Ее коэффициенты k_{mm} :

$$k_{mm} = \frac{L_x}{2} D \left(\left(\frac{k\pi}{L_x} \right)^4 + 2 \left(\frac{k\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{l\pi}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L_y} \right)^4 \right)$$

где индексы k и l вычисляются через m по формуле (3.3); P – матрица аэродинамических сил с коэффициентами p_{nm} :

$$p_{nm}(\omega) = \frac{2}{L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} P(x, y, T_m, \omega) T_n(x, y) dx dy \quad (3.5)$$

Далее, в разделе 5 выражение (3.5) будет преобразовано, и будет описан метод вычисления коэффициентов матрицы P .

Таким образом, уравнение для определения собственных частот имеет вид

$$\det A(\omega) = 0 \Leftrightarrow \det \left(K - \frac{L_x \omega^2}{2} E + P(\omega) \right) = 0 \quad (3.6)$$

4. Метод решения частотного уравнения. Рассмотрим пластину в пустоте. Этому случаю соответствует частотное уравнение (3.6) без матрицы P , которая отвечает за наличие аэродинамических сил

$$\det \left(K - \frac{L_x \omega^2}{2} E \right) = 0 \quad (4.1)$$

Это уравнение имеет N различных вещественных решений относительно ω^2 , которым соответствуют частоты в вакууме $\omega_{n0} = \sqrt{(2/L_x)k_{nn}}$. Отрицательные частоты не рассматриваются, так как соответствующие собственные движения для отрицательных и положительных частот совпадают.

При добавлении аэродинамических сил частоты перестают быть вещественными. Это следует из того, что матрица $P(\omega)$ является несимметричной и комплексной. Следовательно, задача на собственные значения не является самосопряженной, а собственные частоты комплексны.

Для численного решения частотного уравнения будем использовать две модификации итерационного метода. Пусть нужно вычислить n -ую собственную частоту ω_n . В качестве начального приближения возьмем n -ую собственную частоту в вакууме $\omega_{n0} = \sqrt{(2/L_x)k_{nn}}$. Далее, пусть имеется p -ое приближение ω_{np} . Составим матрицу $A_{p+1}(\omega_{np}, \omega_{n(p+1)})$ так, чтобы $\omega_{n(p+1)}$ входило в нее простейшим образом. Все ее коэффициенты a_{ij} , за исключением a_{nn} , возьмем такими же, как у матрицы $A(\omega_{np})$, коэффициент a_{nn} вычислим по формуле

$$a_{nn} = k_{nn} - \frac{L_x}{2}(\omega_{n(p+1)})^2 + p_{nn}(\omega_{np}) \quad (4.2)$$

где k_{nn} и p_{nn} – соответствующие коэффициенты матриц K и P .

Таким образом, уравнение для вычисления $(p+1)$ -го приближения $\omega_{n(p+1)}$ имеет вид

$$\det[A_{p+1}(\omega_{np}, \omega_{n(p+1)})] = 0 \quad (4.3)$$

Это уравнение является линейным относительно $(\omega_{n(p+1)})^2$, из двух значений $\omega_{n(p+1)}$ берется лежащее в правой полуплоскости комплексной плоскости $\text{Re}\omega_{n(p+1)} > 0$.

Итерации для вычисления ω_n продолжаются, пока не выполнено условие:

$$\left| \frac{\omega_{np} - \omega_{n(p-1)}}{\omega_{np}} \right| < \varepsilon \quad (4.4)$$

В расчете полагалось значение $\varepsilon = 10^{-6}$. Вопрос сходимости будет рассмотрен в разделе 6.

Вторую модификацию итерационного метода будем применять в случае с частотами $\omega_n = \omega_1^j$ и $\omega_{n+1} = \omega_2^j$ (здесь, как и для базисных функций, используется обозначение $\omega_n = \omega_l^k$), которые отвечают за возникновение флаттера связанного типа. Его сущность заключается в том, что при определенных параметрах задачи эти две частоты сближаются друг с другом в комплексной плоскости. Необходимость использования модифицированного метода заключается в том, что при приближении итераций к искомой частоте может произойти заикливание итераций в виде перескакивания $\omega_{n(p+1)}$ с ветви одной частоты на ветвь другой. Модифицированный метод решает эту проблему следующим способом. Составим матрицу $A_{p+1}(\omega_{np}, \omega_{n(p+1)})$ для следующего приближения, куда $\omega_{n(p+1)}$ входит сразу в два элемента матрицы:

$$a_{jj} = k_{jj} - \frac{L_x}{2}(\omega_{n(p+1)})^2 + p_{jj}(\omega_{np}), \quad j = n, n+1 \quad (4.5)$$

Все остальные коэффициенты a_{ij} матрицы $A_{p+1}(\omega_{np}, \omega_{n(p+1)})$ остаются такими же, как у $A(\omega_{np})$. При решении уравнения $\det A_{p+1}(\omega_{np}, \omega_{n(p+1)}) = 0$ получаем четыре корня, из них выбираем два с положительной вещественной частью, s_1 и s_2 . Эти два корня соответствуют двум частотам ω_n и ω_{n+1} . Следующий критерий позволяет правильно отобрать корень, соответствующий искомой частоте. Обозначим через s_3 точку, лежа-

щую в середине отрезка, который соединяет s_1 и s_2 в комплексной плоскости, $s_3 = (s_1 + s_2)/2$. Проведем прямую через s_3 под углом $\pi/4$ к вещественной оси. Корень, лежащий выше этой прямой, будет соответствовать частоте ω_n , другой корень соответствует частоте ω_{n+1} . Таким образом, если $(\text{Im}s_1 - \text{Im}s_3) > (\text{Re}s_1 - \text{Re}s_3)$, то $s_1 = \omega_n$, а $s_2 = \omega_{n+1}$, и наоборот в противном случае.

5. Вычисление аэродинамической матрицы P . Для вычисления элементов аэродинамической матрицы $P(\omega)$ необходимо вычислить возмущение давления P , которое входит в уравнение движения пластины (2.5). В выражении (2.7) представлено аналитическое выражение для потенциала $\Phi(x, y, \omega)$. Преобразуем его для случая $W(x, y) = \sin(\kappa x)\sin(\lambda y)$. Представим двумерный интеграл по треугольнику K в виде двух вложенных интегралов по x и y , тогда интеграл по y вычисляется аналитически. Полученное выражение имеет вид

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{\beta} \sin(\lambda y) \int_0^x (-i\omega \sin(\kappa x_1) + M\kappa \cos(\kappa x_1)) \exp\left(\frac{i\omega M}{\beta^2}(x - x_1)\right) J_0(\xi) dx_1 \quad (5.1)$$

где J_0 – функция Бесселя нулевого порядка, $\xi = \sqrt{\omega^2 + (\beta\lambda)^2}(x - x_1)/\beta^2$.

Теперь, подставляя (5.1) в выражение для возмущения давления (2.5), дифференцируя и группируя одинаковые слагаемые, получаем:

$$\begin{aligned} P(x, y, T_m, \omega) &= \sin(\lambda y) \left(\frac{\mu M}{\beta} (-i\omega \sin(\kappa x) + M\kappa \cos(\kappa x)) + \frac{\mu}{\beta^3} \int_0^x (-i\omega \sin(\kappa x_1) + \right. \\ &+ M\kappa \cos(\kappa x_1)) \exp\left(\frac{i\omega M}{\beta^2}(x - x_1)\right) (i\omega J_0(\xi) - M\sqrt{\omega^2 + (\lambda\beta)^2} J_1(\xi)) dx_1 \Big) = \\ &= W^l(y) P_x(x, W_k, \omega) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Преобразуем выражение (3.5) для коэффициентов матрицы P , используя выражение (5.2). Пусть для определенности $T_m(x, y) = W_k(x)W^l(y)$, а $T_n(x, y) = W_r(x)W^s(y)$. После подстановки (5.2) в (3.5) двумерный интеграл распадается на два вложенных, и интеграл по y вычисляется аналитически:

$$\begin{aligned} p_{nm}(\omega) &= \frac{2}{L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} P(x, y, T_m, \omega) T_n(x, y) dx dy = \\ &= \frac{2}{L_y} \int_0^{L_y} W^l(y) P_x(x, W_k(x), \omega) W_r(x) W^s(y) dx dy = \\ &= \frac{2}{L_y} \int_0^{L_y} W^l(y) W^s(y) dy \int_0^{L_x} P_x(x, W_k(x), \omega) W_r(x) dx = \delta_s^l \int_0^{L_x} P_x(x, W_k(x), \omega) W_r(x) dx \end{aligned} \quad (5.3)$$

где δ_s^l – символ Кронекера.

Отсюда видно, что коэффициенты p_{nm} , отличные от нуля, задаются выражением $s = l$, которое верно тогда и только тогда, когда $[(m - 1)/N_x] = [(n - 1)/N_x]$. Таким образом, ненулевые коэффициенты p_{nm} , отличные от нуля, заполняют квадратные блоки матрицы P , лежащие на главной диагонали.

Далее, для вычисления ненулевых p_{nm} требуется вычислить два интеграла, внешний (5.3) и внутренний (5.2). Оба вычисляются с помощью метода трапеций. При вычислении внешнего интеграла число точек разбиения полагалось $10N_x$, то есть 10 точек на полуволну прогиба базисной функции с максимальным номером по направлению оси x . При вычислении внутреннего полагалось 22 точки разбиения. Достаточность этого количества исследуется ниже в разделе 6.

Заметим, что в потоке формы колебаний пластины вдоль оси x (направление вдоль потока) отличны от форм колебаний в пустоте, в то время как вдоль оси y (направление поперек потока) они не меняются и имеют, как и в пустоте, синусоидальный характер. Поэтому

$$\omega_i^j(D, \mu, L_x, L_y) = \omega_i^1(D, \mu, L_x, L_y/j) \quad (5.4)$$

Таким образом, границы области неустойчивости для частоты с номером $j > 1$ совпадают с границами области неустойчивости для частоты с $j = 1$ при соответствующем изменении L_y . Легко видеть, что по той же причине в расчетах достаточно положить $N_y = 1$.

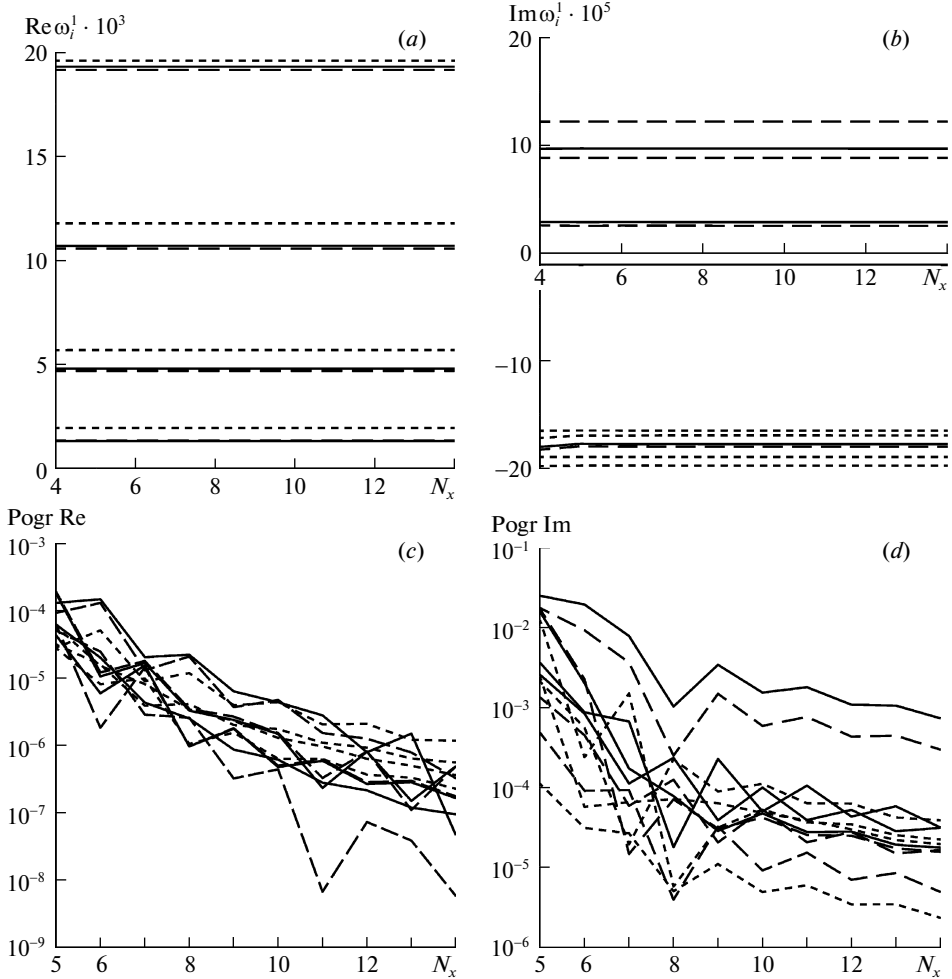
6. Сходимость. На фиг. 4 показана сходимость четырех частот ω_1^1 , ω_2^1 , ω_3^1 и ω_4^1 по количеству базисных функций N_x . Расчеты проводились при $L_y = 1000$ (линии с длинным штрихом, $L_y = 500$ (сплошные линии) и $L_y = 200$ (линии с коротким штрихом), остальные безразмерные параметры фиксировались: $D = 23.9$, $\mu = 0.00012$, $M = 1.2$, $L_x = 200$. Параметр ε полагался равным 10^{-6} , количество точек разбиения внешнего интеграла – $10N_x$, внутреннего интеграла – 30. На фиг. 4, *a* по вертикальной оси откладываются значения вещественных частей частот, а по горизонтальной оси количество базисных функций N_x . На фиг. 4, *c* приведены относительные погрешности вещественных частей, соответствующие графику 4, *a*, которые вычисляются следующим образом:

$$\text{PogrRe}(N_x) = \left| \frac{\text{Re}\omega(N_x) - \text{Re}\omega(N_x - 1)}{\text{Re}\omega(N_x)} \right| \quad (6.1)$$

Аналогично на фиг. 4, *b* и *d* приведены значения и относительные погрешности мнимых частей тех же частот. Как видно, точность расчетов, полученных уже при $N_x = 4$, достаточная. Именно это количество базисных функций полагалось во всех последующих вычислениях.

На фиг. 5 изображены сходимости вещественных и мнимых частей тех же четырех частот по параметру ε (4.4). Все расчеты проводились при тех же безразмерных параметрах, что и на фиг. 4. На графиках 5, *a* и *b* по вертикальной оси откладываются значения вещественных и мнимых частей соответственно, по горизонтальной оси – значения $|\lg\varepsilon|$. При этом сам параметр принимал значения 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} , 10^{-6} , 10^{-7} , 10^{-8} соответственно. На графиках 5, *c* и *d* изображены относительные погрешности вещественных и мнимых частей соответственно, которые вычисляются аналогично (6.1). Во всех последующих расчетах полагалось значение $\varepsilon = 10^{-6}$, которое дает вполне удовлетворительную точность.

Рассмотрим сходимость по количеству точек интегрирования внешнего интеграла. На фиг. 6 изображена зависимость частоты ω_2^1 от количества точек k_1 , приходящихся на одну полуволну базисной функции с максимальным номером по направлению потока при разбиении внешнего интеграла (5.3). Общее количество точек разбиения внешнего интеграла равно $k_1 \cdot N_x$. На фиг. 6, *a* и *b* по вертикальным осям откладываются

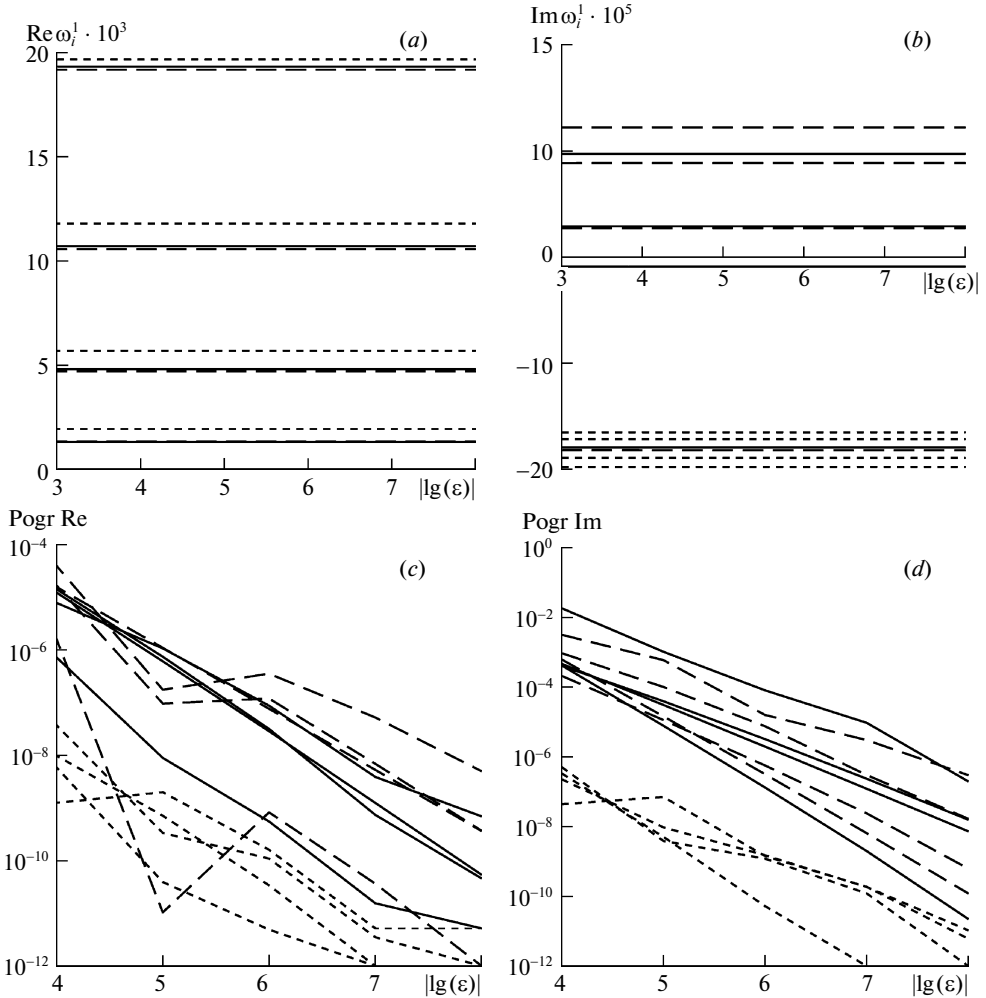


Фиг. 4

ся значения вещественной и мнимой частей соответственно, на фиг. 6, *c* и *d* изображены относительные погрешности вещественных и мнимых частей, вычисленные аналогично (6.1). Безразмерные параметры полагались теми же, что и на предыдущих графиках; значения при $L_y = 1000$ показаны штриховыми, при $L_y = 500$ – сплошными линиями. При всех последующих расчетах количество точек k_1 на одну полуволну полагалось равным 10, приемлемость этого значения видна из представленных графиков.

Далее, на фиг. 7 изображена сходимость вещественной и мнимой частей частоты ω_2^1 по количеству точек разбиения внутреннего интеграла (5.2), количество точек обозначенному как k_2 . При дальнейших расчетах количество точек разбиения внутреннего интеграла полагалось равным 22.

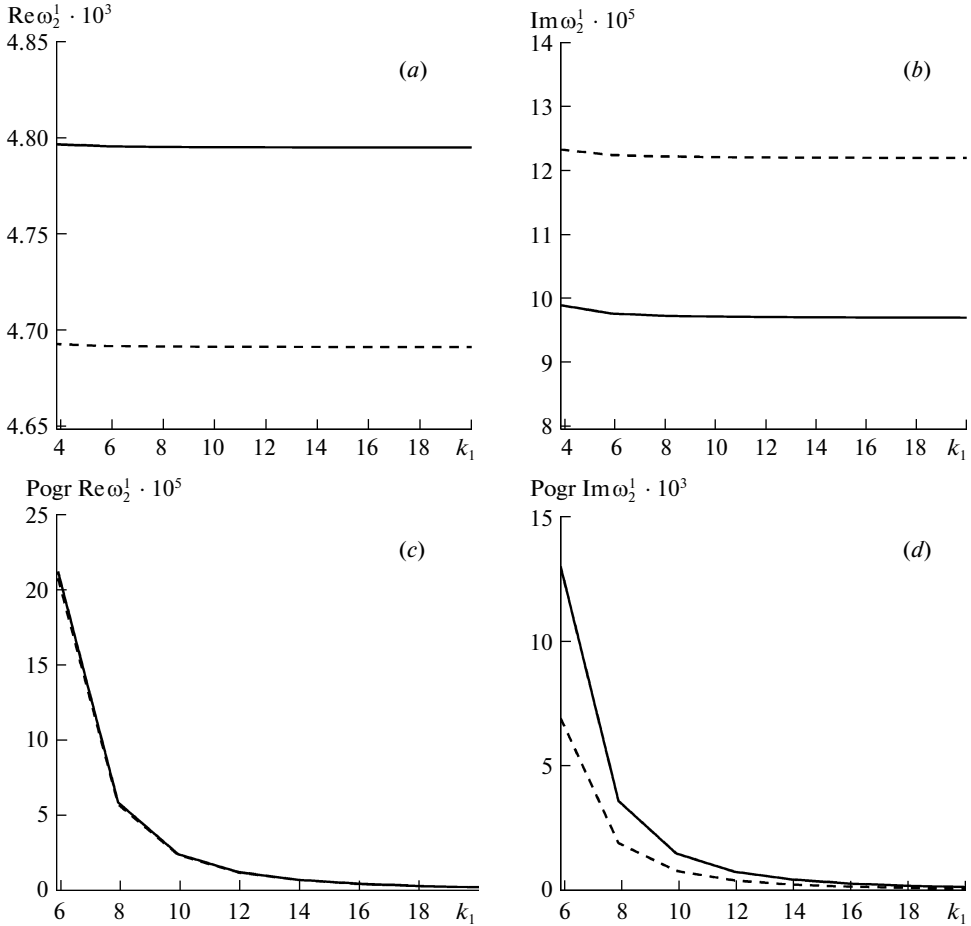
В качестве иллюстрации итерационного процесса на фиг. 8, *a*, *b* изображена сходимость для частоты ω_2^1 при $L_y = 1000$ (штриховые линии) и $L_y = 500$ (сплошные линии).



Фиг. 5

Нулевой итерации соответствует частота в пустоте. Расчеты проводились при тех же безразмерных параметрах, что и на предыдущих графиках. На фиг. 8, с показано значение $|\det A(\omega_2^1(p))|$ с увеличением номера итерации. Надо отметить, что при расчетах итерации останавливаются при условии (4.4), но дополнительный критерий сходимости данного метода заключается в том, что вещественная и мнимая части частоты с ростом итераций стремятся к постоянным значениям. Это визуально наблюдается на фиг. 8. Аналогичным образом сходимость была проверена и для других частот при различных безразмерных параметрах.

Таким образом, после анализа сходимости частот при изменении различных параметров численного метода, были установлены следующие их значения: $N_x = 4$, $N_y = 1$, $\varepsilon = 10^{-6}$, количество точек разбиения внешнего интеграла – $10N_x (=40)$, количество

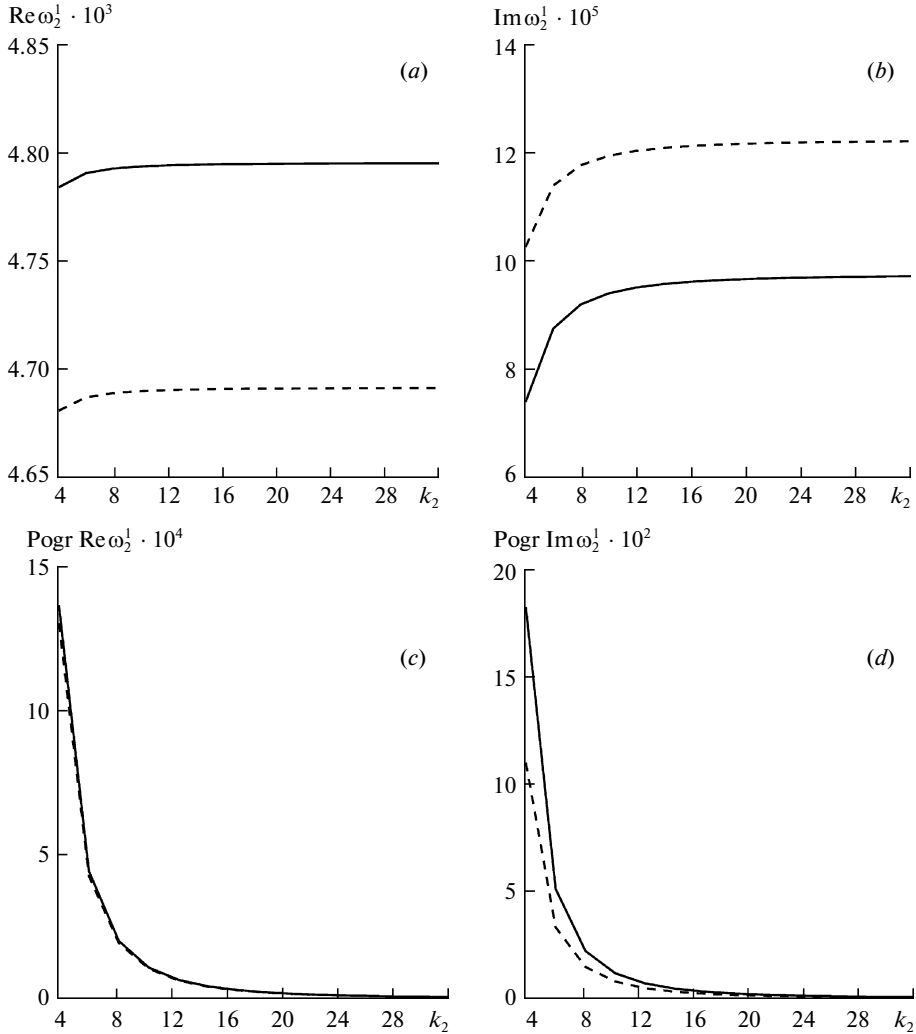


Фиг. 6

точек разбиения внутреннего интеграла – 22. Эти значения полагались ниже при построении областей неустойчивости.

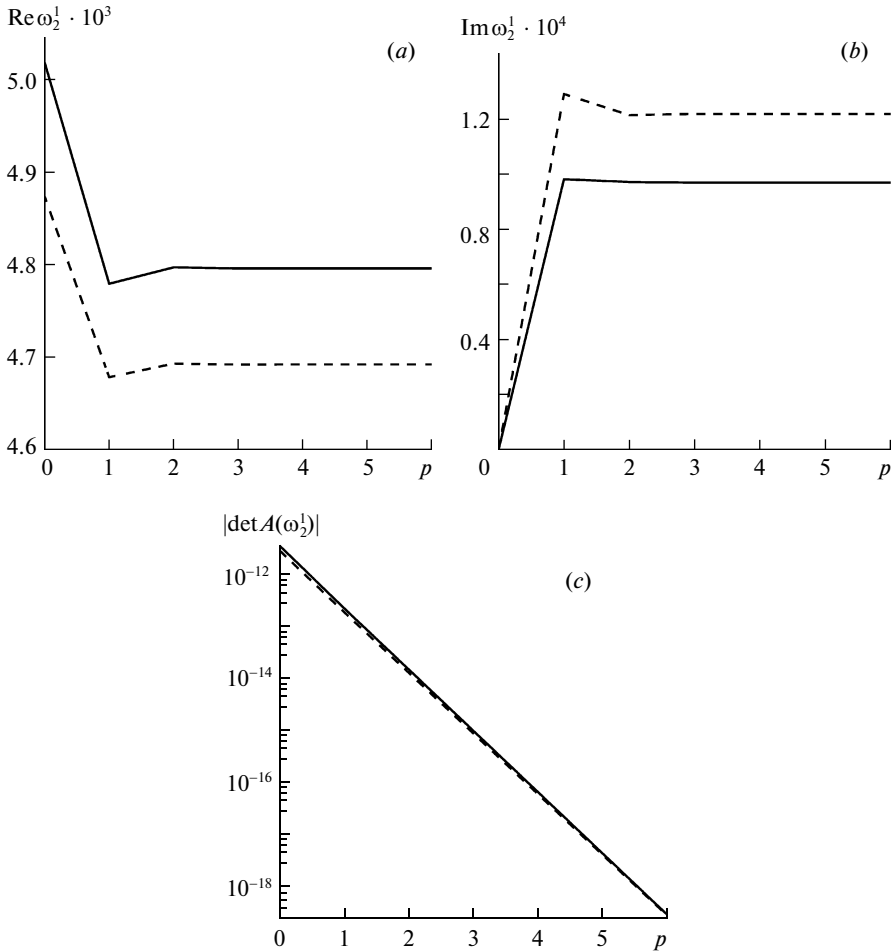
7. Результаты. Для четырех собственных частот ω_j^1 ($j = 1, \dots, 4$) на фиг. 9, *a, b* (ω_1^1 и ω_2^1 соответственно) и 10, *a, b* (ω_3^1 и ω_4^1 соответственно) построены границы области неустойчивости в плоскости $L_x - M$, то есть линии уровня $\text{Im} \omega_j^1 = 0$. На всех фигурах область устойчивости находится слева, в области малых L_x . Все расчеты проводились при постоянных параметрах задачи $D = 23.9$ и $\mu = 0.00012$, соответствующих стальной пластине в потоке воздуха на высоте 3000 м над уровнем моря (или алюминиевой пластине в более разреженных слоях).

Рассмотрим фиг. 9, *a*, где тонкими линиями изображены границы области неустойчивости по первой моде (частота ω_1^1) при $L_y = 1000, 500, 450, 426, 425, 400, 350$ (сплошные и штрихованные границы чередуются по мере уменьшения L_y). Показана область



Фиг. 7

$M < 1.5$. Максимальное значение длины $L_{x \max}$, при котором пластина устойчива при любой ширине L_y , равно 57 и соответствует $L_y = 1000$. При $L_x > L_{x \max}$ и достаточно больших значениях L_y найдется интервал $M^*(L_x, L_y) < M < M^{**}(L_x, L_y)$, в котором пластина неустойчива по первой моде. Отметим, что граница устойчивости при $L_y = 1000$ практически совпадает с границей, рассчитанной в [25] в двумерной постановке, т.е. при $L_y = \infty$. С уменьшением ширины пролета L_y диапазон чисел Маха, в которых пластина неустойчива, уменьшается, и при $L_y \approx 425$ область неустойчивости разделяется на две изолированные подобласти: одна, лежащая в области меньших значений L_x , соответствует одномодовому флаттеру, другая соответствует флаттеру связанного типа. При дальнейшем уменьшении L_y область одномодового флаттера уменьшается в размерах и стягивается к значениям $L_x \approx 90$, $M \approx 1.23$. При $L_y = 315$ она полностью сжимается в



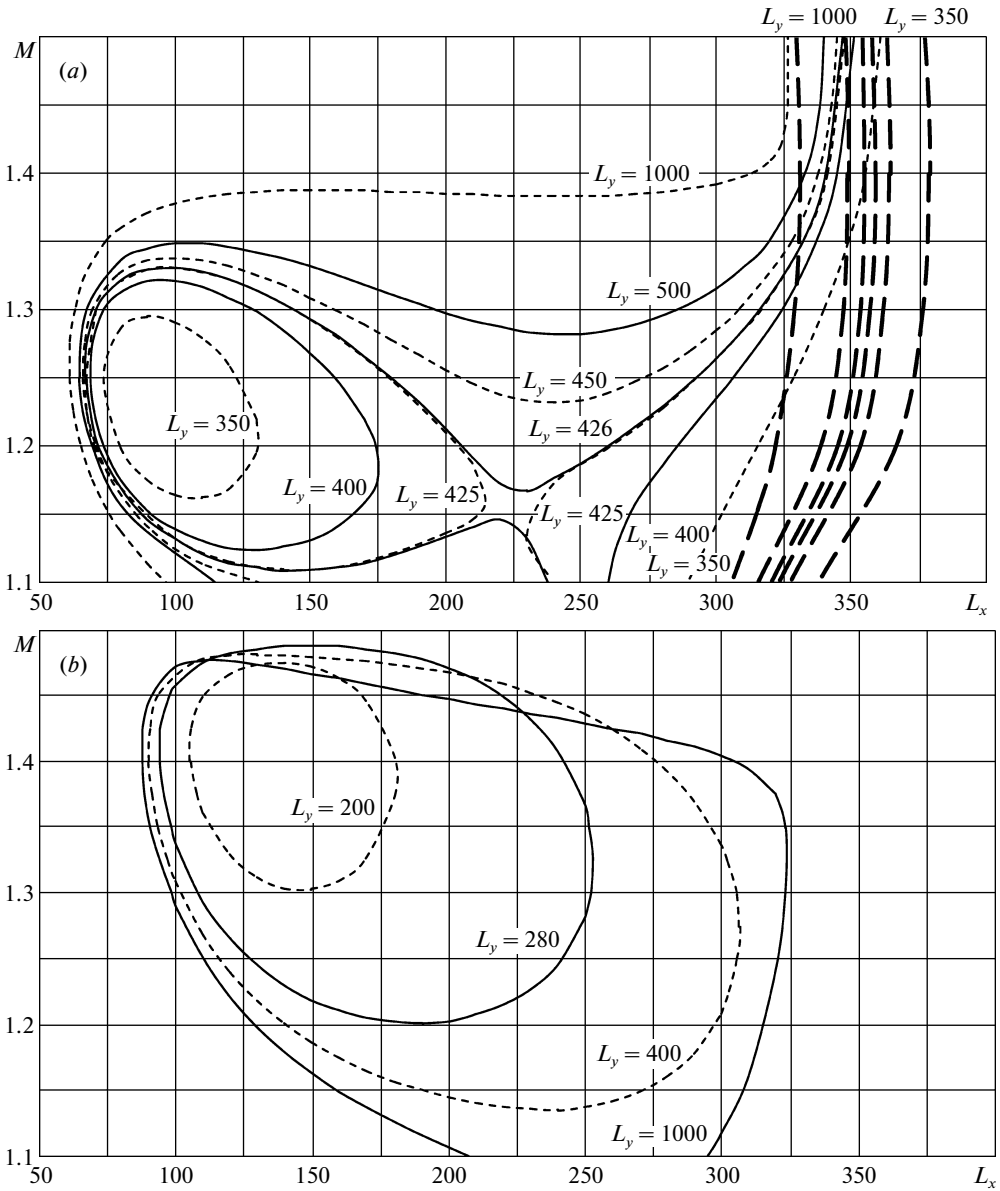
Фиг. 8

указанную точку и исчезает. Граница связанного флаттера при уменьшении L_y меняется гораздо медленнее, смещаясь в сторону более высоких L_x .

Жирными линиями на фиг. 9, *a* показаны границы устойчивости, рассчитанные с помощью поршневой теории, которая получается из (5.2) отбрасыванием интегрального слагаемого. Как видно, область одномодового флаттера при использовании поршневой теории полностью отсутствует, а границы связанного флаттера, рассчитанные по точной и по поршневой теории, при уменьшении L_y становятся близкими.

На фиг. 11 показана граница флаттера в диапазоне $1.5 < M < 5.0$ (область устойчивости слева) при тех же значениях L_y ; результаты расчетов по точной и поршневой теории показаны сплошными и пунктирными линиями, соответственно. Видно, что одномодового флаттера в этом диапазоне чисел Маха нет, а границы флаттера связанного типа, рассчитанные по точной и поршневой теориям, практически совпадают.

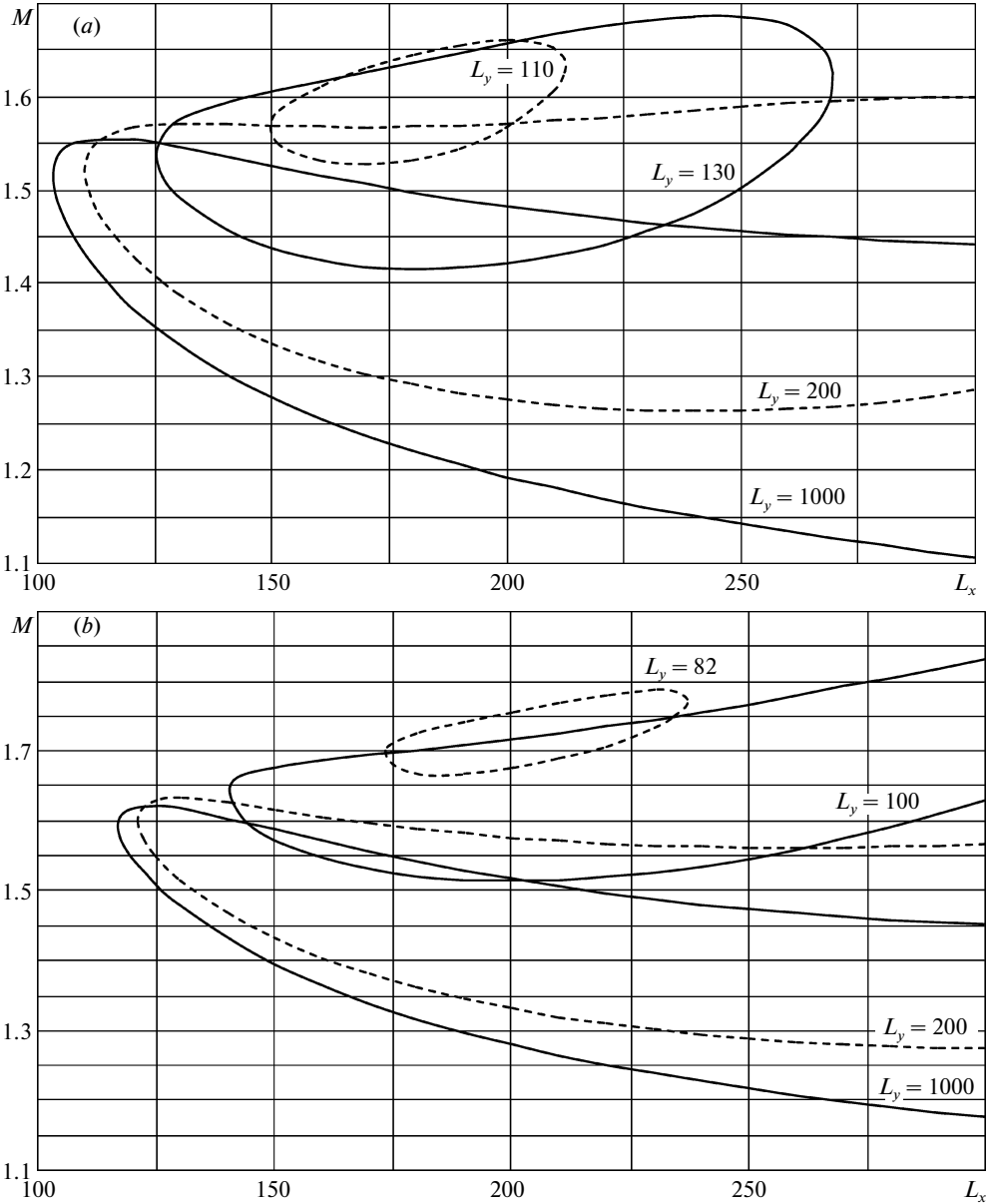
Для сравнения полученных результатов с решением Мовчана рассмотрим границу флаттера, дающуюся формулой (3.8) статьи [2], которая в безразмерных переменных, используемых в настоящей статье, записывается в виде



Фиг. 9

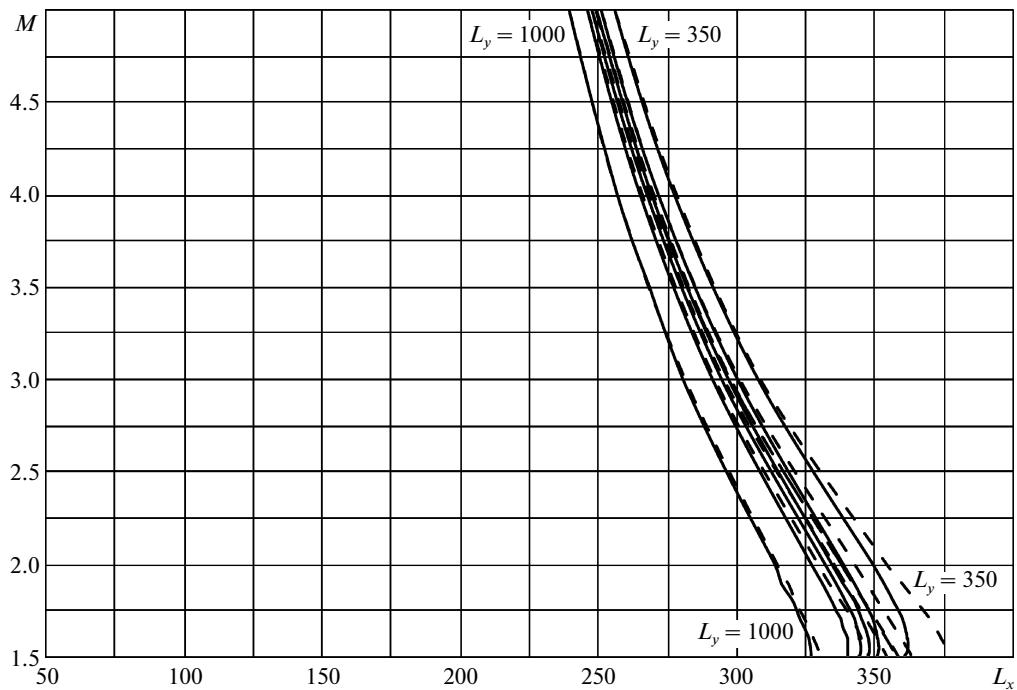
$$M = \frac{D}{\mu L_x^3} \frac{8\pi^3}{3\sqrt{3}} \left(5 + \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^2 \right) \sqrt{ 2 + \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^2 } \quad (7.1)$$

Вариант поршневой теории, более пригодный для $M < 3$, имеет, по сравнению с вариантом [2], множитель $M/\sqrt{M^2 - 1}$ при числе Маха M . Граница устойчивости, получаю-

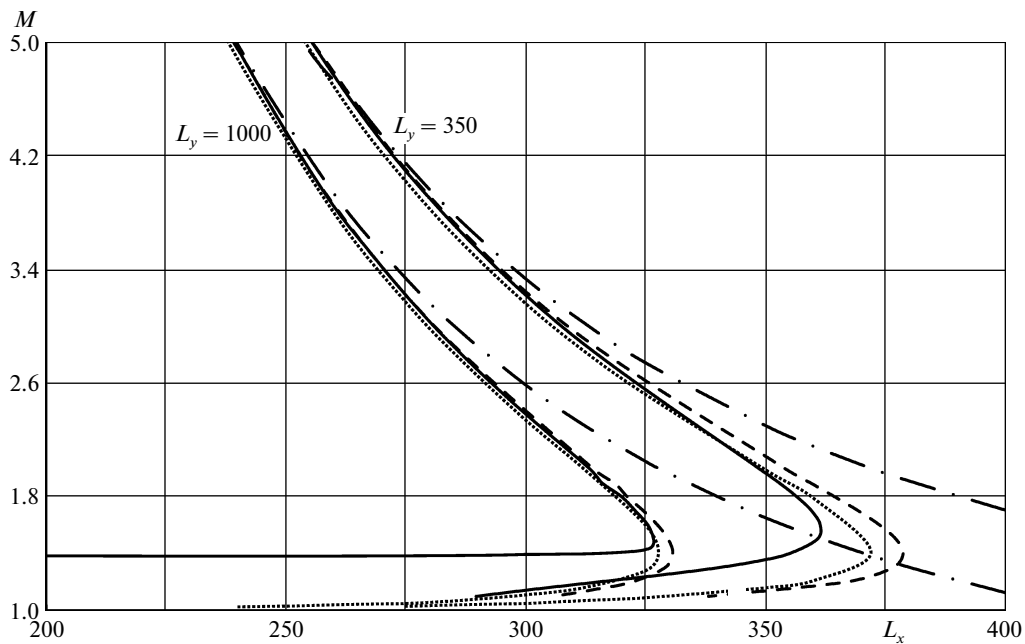


Фиг. 10

шаяся при такой коррекции, следует из (7.1) заменой в левой части M на $M^2/\sqrt{M^2 - 1}$. На фиг. 12 штрихпунктирной и пунктирной линией показаны результаты расчетов границы флаттера по исходной и скорректированной формуле (7.1). Там же штриховой и сплошной линиями показаны результаты расчета описанным в настоящей статье методом с помощью поршневой и точной теорий. Расчеты проведены для $L_y = 350, 1000$. Как видно, при больших числах Маха все четыре метода дают практически сов-



Фиг. 11



Фиг. 12

падающую границу флаттера. При $M < 3$ нескорректированная версия поршневой теории, использованная в [2], дает значительную погрешность. В то же время скорректированный вариант удовлетворительно работает вплоть до $M \approx 1.6$. При более низких значениях M поршневая теория неприменима из-за неспособности выявить одномодовый флаттер.

Перейдем к анализу границ устойчивости по отношению к более высоким модам. На фиг. 9, *b* показана область флаттера по второй моде (частота ω_2^1) при $L_y = 1000, 400, 280, 200$. Эти области справа ограничены значениями L_x , при которых возникает флаттер связанного типа, т.к. в нем “завязываются” первая и вторая моды, причем первая мода становится растущей, а вторая – затухающей. Как и для первой моды, уменьшение L_y приводит к сжатию области одномодового флаттера; при $L_y \approx 177$ она стягивается в точку $L_x \approx 140, M \approx 1.4$ и исчезает.

В отличие от первых двух мод, границы области флаттера по 3-й и 4-й модам, не участвующим в образовании флаттера связанного типа, показанные на фиг. 10, *a, b* соответственно, при $L_y = \infty$ имеют асимптоты $M^* = 1, M^{**} = \sqrt{2}$ при $L_x \rightarrow \infty$ [25]. Границы при $L_y = 1000$ очень близки к результатам расчета двумерной задачи. При уменьшении L_y области флаттера сдвигаются в области более высоких M и становятся ограниченными по оси L_x . Далее, как и в случае одномодового флаттера по первым двум модам, происходит стягивание границ неустойчивости в точку и их исчезновение. Для частоты ω_3^1 область неустойчивости исчезает при $L_y \approx 106$, а стягивание происходит в точку $L_x \approx 190, M \approx 1.6$. Аналогично, область неустойчивости для частоты ω_4^1 исчезает при $L_y \approx 81$, стягивание происходит в точку $L_x \approx 210, M \approx 1.73$.

Сдвиг областей одномодового флаттера в стороны более высоких чисел Маха с уменьшением L_y объясняется с помощью асимптотической теории одномодового флаттера [31]. В этой работе в предположении, что размеры пластины L_x, L_y достаточно большие, собственные движения представлялись в виде циклических отражений бегущих по пластине волн [33]. Критерий усиления собственного колебания (т.е. критерий флаттера по данной моде) определяется углом между направлением движения бегущей волны и направлением потока газа. Уменьшение L_y приводит к увеличению угла между волной и потоком и, соответственно, к увеличению диапазона M , в котором происходит усиление. В количественном виде результаты [31] приводят к следующим границам одномодового флаттера $M^*(L_x, L_y) < M < M^{**}(L_x, L_y)$:

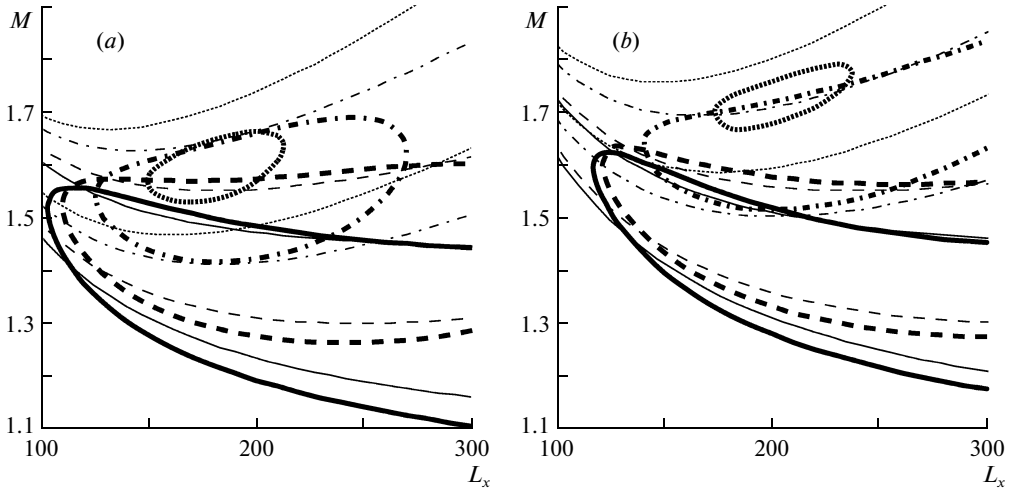
$$M^* = \sqrt{1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\frac{L_x}{L_y}\right)^2} (1 + \sqrt{Dk_0^2}) \tag{7.2}$$

$$M^{**} = \sqrt{1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\frac{L_x}{L_y}\right)^2} \sqrt{1 + Dk_0^2 + \sqrt{4Dk_0^2 + 1}}$$

где m и n – числа полувольт собственной формы в направлении осей x и y :

$$k_0 = \sqrt{(m\pi/L_x)^2 + (n\pi/L_y)^2}$$

На фиг. 13 показано сравнение границ, посчитанных численно (жирные линии) и по асимптотическим формулам (7.2) (тонкие линии). На фиг. 13, *a* показаны границы флаттера по 3-й моде для $L_y = 1000, 200, 130, 110$, отображенные, соответственно, сплошными, штриховыми, штрихпунктирными и пунктирными линиями. На



Фиг. 13

фиг. 13, *b* теми же линиями показаны границы флаттера по 4-й моде для $L_y = 1000, 200, 100, 82$. Как видно, увеличение чисел Маха, в котором наблюдается неустойчивость, в “центральной” части области флаттера, $L_x = 100 \dots 300$, правильно описывается асимптотиками. Отличие имеется лишь в области малых L_x , где не выполняется условие больших размеров в направлении оси x , и в области больших M , которая достигается лишь при достаточно малых L_y , когда нарушается условие больших размеров пластины в направлении оси y .

8. Заключение. В линейном приближении рассмотрена задача об устойчивости упругой периодически подкрепленной полосы, шарнирно опертой по передней и задней кромкам и обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком газа. Для описания аэродинамики использовалась точная теория потенциального течения газа, верная при всех $M > 1$, в т.ч. при малых сверхзвуковых скоростях. Численно построены области флаттера по первым четырем собственным модам. Область флаттера по 1-й моде состоит из областей связанного и одномодового флаттера, по другим трем модам — только из одномодового флаттера.

При достаточно больших значениях ширины пролета L_y области неустойчивости близки к соответствующим областям двумерной задачи, решенной в [25], где зависимость от координаты y отсутствует. При уменьшении параметра L_y области неустойчивости существенно изменяются. Для первой моды она перестает быть односвязной и разделяется на две части, соответствующие одномодовому и связанному флаттеру. При дальнейшем уменьшении L_y область одномодового флаттера стягивается в точку и исчезает; область флаттера связанного типа остается, сдвигаясь в сторону более высоких L_x . Для остальных мод области флаттера также сжимаются и исчезают, при этом происходит увеличение чисел Маха, при которых имеется неустойчивость.

Проведено сравнение результатов с расчетом по поршневой теории и показано, что при ее использовании одномодовый флаттер не обнаруживается, т.к. при малых числах Маха ($M < 1.7$) она качественно неверно описывает аэродинамику задачи. В то же время при больших M результаты расчетов по точной и поршневой теориям практически совпадают.

Результаты расчета одномодового флаттера сопоставлены с асимптотической теорией, которая находится в качественном согласии с расчетом и объясняет увеличение чисел Маха, соответствующих неустойчивости, при уменьшении $L_{\text{г}}$.

Работа поддержана грантами РФФИ (14-01-31547 и 14-01-00049) и грантом Президента РФ МД-4544.2015.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 211–222.
2. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 231–243.
3. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 6. С. 733–755.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
5. Григолюк Э.И., Лампер Р.Е., Шандаров Л.Г. Флаттер панелей и оболочек // Итоги науки. Механика. 1963. М.: ВИНТИ, 1965. С. 34–90.
6. Dugundji J. Theoretical considerations of panel flutter at high supersonic Mach numbers // AIAA J. 1966. V. 4. № 7. P. 1257–1266.
7. Dowell E.Y. Aeroelasticity of plates and shells. Leyden: Noordhoff International Publishing. 1974.
8. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. С. 67–122.
9. Mei C., Abdel-Motagaly K., Chen R.R. Review of nonlinear panel flutter at supersonic and hypersonic speeds // Appl. Mech. Rev. 1999. V. 10. P. 321–332.
10. Алгазин С.Д., Куйко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
11. Куйко И.А., Показеев В.В. Колебания и устойчивость вязкоупругой полосы в потоке газа // Докл. РАН. 2005. Т. 410. № 3. С. 342–344.
12. Duan B., Abdel-Motagaly K., Guo X., Mei C. Suppression of supersonic panel flutter and thermal deflection using shape memory alloy // AIAA Paper 2003-1513. 2003.
13. Zhou R.C., Lai Z., Xue D.Y., Huang J.-K., Mei C. Suppression of nonlinear panel flutter with piezoelectric actuators using finite element method // AIAA Journal. 1995. V. 33. № 6. P. 1098–1105.
14. Дун Мин-Дэ. Об устойчивости упругой пластинки при сверхзвуковом обтекании // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120. № 4. С. 726–729.
15. Nelson H.C., Cunningham H.J. Theoretical investigation of flutter of two-dimensional flat panels with one surface exposed to supersonic potential flow. NACA Report No. 1280. 1956.
16. Yang T.Y. Flutter of flat finite element panels in supersonic potential flow // AIAA J. 1975. V. 13. № 11. P. 1502–1507. = Янг. Исследование флаттера панелей в сверхзвуковом потенциальном потоке методом конечных элементов // Ракетная техника и космонавтика. 1975. Т. 13. № 11. С. 110–117.
17. Bendiksen O.O., Davis G.A. Nonlinear traveling wave flutter of panels in transonic flow // AIAA Paper 95-1486. 1995. 17 p.
18. Bendiksen O.O., Seber G. Fluid-structure interactions with both structural and fluid nonlinearities // J. Sound and Vibrat. 2008. V. 315. № 3. P. 664–684.
19. Dowell E.H. Aerodynamic boundary layer effect on flutter and damping of plates // J. of Aircraft. 1973. V. 10. № 12. P. 734–738.
20. Selvam R.P., Visbal M.R., Morton S.A. Computation of Nonlinear Viscous Panel Flutter Using a Fully-Implicit Aeroelastic Solver // AIAA Paper 98-1844. 1998. 10 p.
21. Gordnier R.E., Visbal M.R. Computation of three-dimensional nonlinear panel flutter // AIAA Paper 2001-0571. 2001. 17 p.

22. Hashimoto A., Aoyama T., Nakamura Y. Effect of turbulent boundary layer on panel flutter // AIAA J. 2009. V. 47. № 12. P. 2785–2791.
23. Веденеев В.В. Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 155–169.
24. Куликовский А.Г. Об устойчивости однородных состояний // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148–153.
25. Vedeneev V.V. Panel flutter at low supersonic speeds // J. Fluids and Struct. 2012. V. 19. P. 79–96.
26. Vedeneev V. Interaction of panel flutter with inviscid boundary layer instability in supersonic flow // J. Fluid Mech. 2013. V. 736. P. 216–249.
27. Vedeneev V.V. Effect of damping on flutter of simply supported and clamped panels at low supersonic speeds // J. Fluids and Struct. 2013. V. 40. P. 366–372.
28. Веденеев В.В., Гувернюк С.В., Зубков А.Ф., Колотников М.Е. Экспериментальное исследование одномодового панельного флаттера в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 2. С. 161–175.
29. Веденеев В.В. Нелинейный высокочастотный флаттер пластины // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 5. С. 197–208.
30. Веденеев В.В. Предельные циклы колебаний при одномодовом флаттере пластины // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 355–370.
31. Веденеев В.В. Высокочастотный флаттер прямоугольной пластины // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 4. С. 173–181.
32. Веденеев В.В. Исследование одномодового флаттера прямоугольной пластины в случае переменного усиления собственной моды вдоль пластины // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 4. С. 163–174.
33. Куликовский А.Г. О глобальной неустойчивости однородных течений в неоднородных областях // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 257–263.
34. Miles J.W. The Potential Theory of Unsteady Supersonic Flow. Cambridge University Press, 1959 = Майлс Дж.У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М.: Физматгиз, 1963. 272 с.
35. Соловьев С.И. Метод конечных элементов для симметричных задач на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра // Вычислительная математика и математическая физика. 1997. Т. 37. № 37. С. 1311–1318.
36. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Москва
E-mail: vasily@vedeneev.ru
shltov@gmail.com

Поступила в редакцию
04.03.2013