

УДК 533.6.013.42

О применении асимптотического метода глобальной неустойчивости в задачах аэроупругости¹

В. В. Веденеев²

Поступило 6 июля 2016 г.

Асимптотический метод глобальной неустойчивости, разработанный А.Г. Куликовским, — эффективный инструмент определения собственных частот и границы устойчивости одномерных или многомерных систем конечных размеров, достаточно протяженных в пространстве. Его эффективность была показана в ряде одномерных задач, а с середины 2000-х годов его стали использовать в задачах аэроупругости, которые не являются строго одномерными: таковой является лишь упругая часть задачи, в то время как поток газа занимает неограниченную область. В настоящей работе проводится сравнение собственных частот и границ устойчивости, предсказанных методом глобальной неустойчивости, с прямым расчетом спектров соответствующих задач. Устанавливаются размеры систем, начиная с которых рассматриваемый метод количественно правильно предсказывает границу устойчивости.

DOI: 10.1134/S0371968516040178

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах исследуется устойчивость систем, у которых протяженность в одном направлении много больше протяженности в других направлениях. Примерами могут быть устойчивость пограничных слоев на твердых телах, течения в трубах, гидро- и аэроупругая устойчивость тонкостенных конструкций в потоке жидкости или газа и другие системы. После линеаризации системы уравнений для возмущений обычно исследуется поведение решений вида $e^{i(kx-\omega t)}$, т.е. бегущих волн, которые в подавляющем большинстве задач полностью определяют устойчивость произвольных возмущений бесконечно протяженной системы.

Однако в системах конечной, пусть и сколь угодно большой, протяженности решения в виде одной бегущей волны не могут существовать, так как имеет место отражение волн от границ, даже если они достаточно сильно удалены от места возникновения возмущения. Задача об устойчивости систем большой, но конечной протяженности была решена в общем виде А.Г. Куликовским для одномерных [7] (см. также [12, § 65]) и многомерных [10] систем. Главными результатами являются следующие:

- при сколько угодно большой длине L системы критерий ее устойчивости не совпадает с критерием устойчивости бесконечно длинной системы;
- растущие возмущения могут иметь вид либо “односторонних” собственных функций, которые определяются отражением волн на одном конце, либо “глобальных” собственных функций, представляющих собой две бегущие в противоположные стороны волны, превращающиеся друг в друга при отражении от концов системы;
- если длина системы L достаточно большая, то рост или затухание односторонних собственных функций определяется только граничным условием на том конце, на котором

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

²Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.

E-mail: vasily@vedeneev.ru

происходит отражение волн; критерий устойчивости глобальных собственных функций не зависит от конкретного вида граничных условий, заданных на ее концах.

Если неустойчивость системы определяется ростом односторонних собственных функций, то она, вообще говоря, может быть устранена таким изменением физической системы, при котором соответствующим образом изменяется граничное условие на рассматриваемом конце. Напротив, глобальная неустойчивость определяется только свойствами самой системы и не может быть устранена за счет изменения граничных условий.

Критерий глобальной неустойчивости успешно использовался при исследовании устойчивости самых разных процессов: течения Пуазейля в трубе конечной длины [1, 8, 9], термокапиллярной конвекции [16], струйных течений жидкости [19, 32], упругих пластин в потоке несжимаемой жидкости [15], спиральных волн [5], пламен [14], осесимметричного течения Куэтта магнитной жидкости [17]. Этот критерий также применялся при анализе некоторых моделей термопластичности [6], исследовании вибраций труб с движущейся внутри жидкостью [3, 11], изучении флаттера панелей обшивки летательных аппаратов в сверхзвуковом потоке газа [21, 23, 29, 30], анализе собственных мод течений над углублениями [20] и исследовании других задач [4].

Хотя в большинстве своем эти задачи являются одномерными, в задачах об устойчивости пластин в потоке газа конечной является лишь пластина, в то время как область течения газа бесконечна. Такая система не является полностью одномерной, поэтому невозможно только с помощью анализа одномерных волн получить оценку размеров пластин, к которым применим асимптотический метод. Целью настоящей работы являются сравнение результатов, полученных с помощью критерия глобальной неустойчивости, с численным решением задачи о флаттере упругой пластины в потоке газа и выяснение размеров пластины, начиная с которых асимптотический критерий дает удовлетворительные результаты. Важность этого вопроса вызвана тем, что в плоских задачах асимптотический метод количественно верно описывает как линейные, так и нелинейные [18, 24, 28] эффекты, но его эффективность в трехмерных задачах не выяснена.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается упругая пластина конечных размеров, вмонтированная в абсолютно жесткую плоскость. С одной стороны от нее движется сверхзвуковой поток газа, с другой поддерживается постоянное давление, равное невозмущенному давлению в потоке, что обеспечивает плоское состояние равновесия пластины (рис. 1). Рассматриваются три конфигурации: пластина в виде полосы (рис. 1, *а*) — двумерная задача, бесконечная серия связанных пластин размера $L_{wx} \times L_{wy}$ или, что то же самое, пластина в виде периодически шарнирно подкрепленной полосы (рис. 1, *б*) и одиночная пластина размера $L_{wx} \times L_{wy}$ (рис. 1, *в*). Двумерный случай сводится к остальным при $L_{wy} = \infty$.

Движение пластины описывается моделью Кирхгофа–Лява. Жесткость пластины D_w , толщина h , плотность ее материала ρ_m . В плоскости пластины действует изотропное растягивающее усилие $N_w = \sigma h$, где σ — растягивающее напряжение. Газ считается невязким и совершенным, движение адиабатическое. Его скорость U , плотность ρ , скорость звука a .

Для перехода к безразмерным переменным в качестве величин с независимыми размерностями выберем величины a , ρ_m и h . Тогда безразмерные параметры выражаются через размерные следующим образом:

$$D = \frac{D_w}{a^2 \rho_m h^3}, \quad M_w = \sqrt{\frac{N_w}{a^2 \rho_m h}}, \quad L_x = \frac{L_{wx}}{h}, \quad L_y = \frac{L_{wy}}{h}, \quad M = \frac{U}{a}, \quad \mu = \frac{\rho}{\rho_m}. \quad (2.1)$$

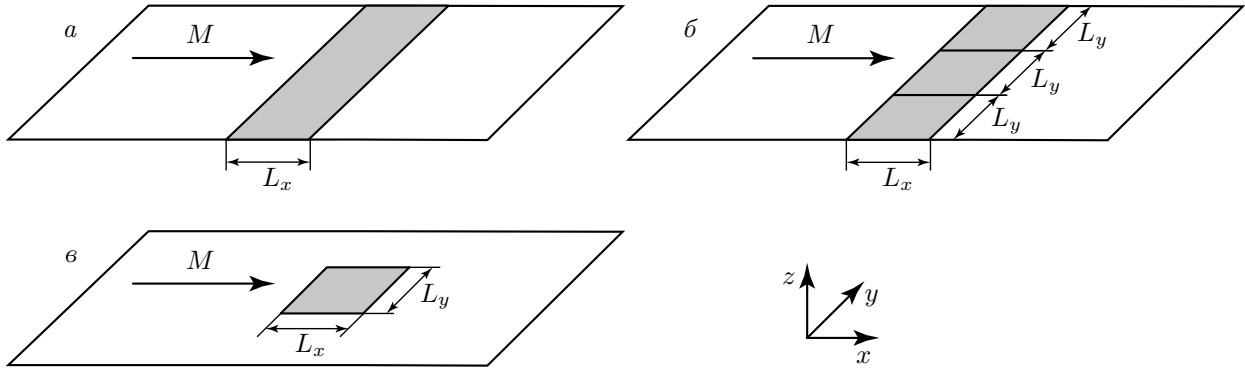


Рис. 1. Пластина в потоке газа: *a* — пластина в форме полосы; *б* — серия связанных шарнирно опертых пластин; *в* — одиночная прямоугольная пластина

Здесь D, L_x, L_y — безразмерные жесткость, длина и ширина пластины, M и μ — число Маха и безразмерная плотность газа. Параметр M_w , характеризующий натяжение, имеет смысл безразмерной скорости длинных волн в пластине в пустоте.

Уравнение движения Кирхгофа–Лява тонкой упругой пластины в потоке газа и граничное условие шарнирного опирания на ее краях записываются в безразмерном виде следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \Delta^2 w - M_w^2 \Delta w + p = 0, \quad (x, y) \in S, \tag{2.2}$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, L_x, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0, L_y,$$

где $w(x, y, t)$ — прогиб пластины, Δ — двумерный оператор Лапласа, $S = (0, L_x) \times (0, L_y)$ — поверхность пластины. Из линеаризованной теории движения газа разница давлений $p(x, y, t)$, действующих на пластину, выражается через потенциал движения газа $\varphi(x, y, z, t)$:

$$p(x, y, t) = -\mu \left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x, y, 0, t). \tag{2.3}$$

Система линеаризованных уравнений и граничных условий, описывающая малые возмущения газа, имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad z > 0,$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty \quad \text{вдоль характеристик } z = \frac{x - x_0}{\sqrt{M^2 - 1}}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + M \frac{\partial w}{\partial x}, \quad z = 0, \quad (x, y) \in S, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (x, y) \notin S.$$

Здесь первое уравнение — волновое уравнение в системе координат, движущейся со скоростью потока. Второе условие — условие излучения — накладывається только на растущие возмущения. Третье условие в (2.4) выражает условие непротекания газа через колеблющуюся пластину и абсолютно жесткую плоскость вокруг нее.

Устойчивость упругой пластины в потоке газа определяется поведением собственных мод, поэтому далее примем, что малые возмущения прогиба пластины и потенциала течения газа имеют вид

$$w(x, y, t) = W(x, y)e^{-i\omega t}, \quad \varphi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z)e^{-i\omega t}. \tag{2.5}$$

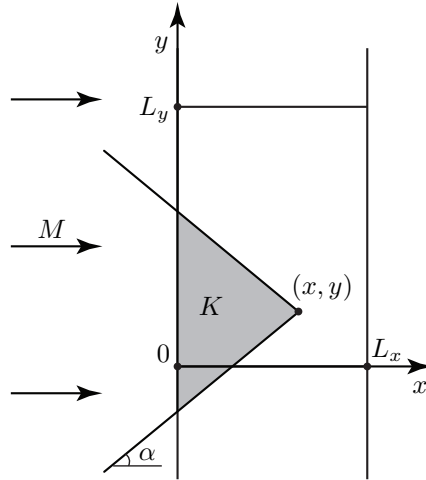


Рис. 2. Пересечение обратного конуса Маха, выпущенного из точки (x, y) , с поверхностью пластины

Подстановка в уравнения для возмущений дает уравнение для собственных мод колебаний пластины

$$D \Delta^2 W - M_w^2 \Delta w - \omega^2 W - \mu \left(-i\omega + M \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in S, \tag{2.6}$$

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, L_x, \quad W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0, L_y,$$

и уравнения движения газа

$$\left(-i\omega + M \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad z > 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty \quad \text{вдоль характеристик } z = \frac{x - x_0}{\sqrt{M^2 - 1}}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -i\omega W + M \frac{\partial W}{\partial x}, \quad z = 0, \quad (x, y) \in S, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (x, y) \notin S.$$

Уравнение для потенциала Φ с граничными условиями (2.7) решается с помощью преобразования Лапласа аналитически [13, § 4.8]. Решение на поверхности пластины имеет вид

$$\Phi(x, y, 0) = -\frac{1}{\pi} \iint_K \left(-i\omega W(x_1, y_1) + M \frac{\partial W(x_1, y_1)}{\partial x_1} \right) \exp\left(\frac{i\omega M}{\beta^2} (x - x_1) \right) \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(x - x_1)^2 - \beta^2 y_1^2}} \cos\left(\frac{\omega}{\beta^2} \sqrt{(x - x_1)^2 - \beta^2 y_1^2} \right) dx_1 dy_1, \tag{2.8}$$

где K — треугольник, полученный пересечением обратного конуса Маха, выпущенного из точки (x, y) , со всей пластиной (рис. 2), $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$.

Таким образом, уравнение движения пластины (2.6) после подстановки в него выражения (2.8) с граничными условиями шарнирного опирания представляет собой интегродифференциальную задачу на отыскание комплексных собственных значений ω . Отметим, что собственное значение ω входит в уравнение сложным образом: как алгебраически, так и через ядро интегрального оператора. Система неустойчива в том и только том случае, когда

Линейно независимые решения однородной системы можно взять в виде бегущих волн: $U_j(x, \omega) = b_{jm}(\omega)e^{ik_m(\omega)x}$, где волновые числа $k_m(\omega)$, $m = 1, \dots, N$, — решения дисперсионного уравнения системы, неограниченной вдоль оси x :

$$\mathcal{D}(k, \omega) = \begin{vmatrix} P_{11}(ik, -i\omega) & P_{12}(ik, -i\omega) & \dots & P_{1n}(ik, -i\omega) \\ P_{21}(ik, -i\omega) & P_{22}(ik, -i\omega) & \dots & P_{2n}(ik, -i\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1}(ik, -i\omega) & P_{n2}(ik, -i\omega) & \dots & P_{nn}(ik, -i\omega) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Таким образом, общее решение системы (3.2) имеет вид

$$U_j(x, \omega) = U_j^*(x, \omega) + \sum_{m=1}^N C_m b_{jm}(\omega)e^{ik_m(\omega)x}, \quad (3.5)$$

где $U_j^*(x, \omega)$ — частное решение системы (3.2), C_m — произвольные константы.

Для определения C_m подставим (3.5) в граничные условия (3.3). Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно C_m следующего вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11}e^{-ik_1L/2} & a_{12}e^{-ik_2L/2} & \dots & a_{1N}e^{-ik_NL/2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1}e^{-ik_1L/2} & a_{s2}e^{-ik_2L/2} & \dots & a_{sN}e^{-ik_NL/2} \\ a_{(s+1)1}e^{ik_1L/2} & a_{(s+1)2}e^{ik_2L/2} & \dots & a_{(s+1)N}e^{ik_NL/2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1}e^{ik_1L/2} & a_{N2}e^{ik_2L/2} & \dots & a_{NN}e^{ik_NL/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_s \\ C_{s+1} \\ \dots \\ C_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^*(-L/2, \omega) \\ \dots \\ a_s^*(-L/2, \omega) \\ a_{s+1}^*(L/2, \omega) \\ \dots \\ a_N^*(L/2, \omega) \end{pmatrix}.$$

Здесь $a_{ij} = a_{ij}(k_j(\omega), \omega)$, правая часть определяется выбором частного решения $U_j^*(x, \omega)$.

Обозначим матрицу системы через A , а матрицу, в которой m -й столбец заменен на правую часть, через A_m . Тогда по формулам Крамера имеем $C_m = |A_m|/|A|$, откуда получаем решение краевой задачи

$$U_j(x, \omega) = U_j^*(x, \omega) + \frac{1}{|A|} \sum_{m=1}^N |A_m| b_{jm}(\omega)e^{ik_m(\omega)x}.$$

Пользуясь обратным преобразованием Лапласа, получаем решение, удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

$$u_j(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[U_j^*(x, \omega) + \frac{1}{|A|} \sum_{m=1}^N |A_m(\omega)| b_{jm}(\omega)e^{ik_m(\omega)x} \right] e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.6)$$

Интегрирование происходит вдоль прямой Γ , параллельной вещественной оси и лежащей достаточно высоко в комплексной плоскости ω : $-\infty < \text{Re } \omega < \infty$, $\text{Im } \omega = \text{const} > P$. Интеграл (3.6) вычисляется с помощью движения контура интегрирования вниз в область $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$ и выделения полюсов подынтегральной функции с помощью теоремы о вычетах:

$$u_j(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} i \left(\frac{d|A(\omega_n)|}{d\omega} \right)^{-1} \sum_{m=1}^N |A_m(\omega_n)| b_{jm}(\omega_n) e^{i(k_m(\omega_n)x - \omega_n t)}. \quad (3.7)$$

При этом разрезы, выходящие из точек ветвления функции $k(\omega)$, не дают вклада в значение интеграла (3.7), так как обход разреза с разных сторон приводит не к разным значениям

подынтегральной функции, а лишь к перенумерации ветвей $k_m(\omega)$. Счетный набор собственных частот ω_n определяется уравнением

$$|A(\omega)| = 0. \tag{3.8}$$

Решение (3.7) получено для случая, когда поведение возмущений физической системы описывается системой уравнений в частных производных. Дисперсионное уравнение (3.4) в этом случае не содержит точек ветвления, и решение имеет только дискретный спектр частот. В случае пластины, обтекаемой газом, система уравнений имеет вид, отличный от (3.1) (поскольку конечную протяженность имеет только пластина, а газ течет вдоль всей оси x), и дисперсионное уравнение имеет точки ветвления. В этом случае решение (3.7) будет иметь дополнительный непрерывный спектр, появляющийся из-за учета разреза, соединяющего точки ветвления в комплексной плоскости ω . Можно показать, что непрерывный спектр в этом частном случае является вещественным и устойчивость полученного решения определяется только дискретным спектром частот.

Заметим, что приведенные здесь выкладки справедливы не только для систем, описываемых уравнениями в частных производных, но и для произвольных линейных однородных систем, свойства которых не меняются вдоль координаты x . Такие системы всегда имеют решения вида бегущих волн, из которых при помощи суперпозиции можно получить решение, удовлетворяющее граничным условиям.

3.2. Глобальная и односторонняя неустойчивость. Предположим, что ширина рассматриваемой системы достаточно велика ($L \gg 1$). Оказывается, что в этом случае можно в общем виде исследовать поведение собственных частот ω_n и получить асимптотический критерий устойчивости системы, найденный А.Г. Куликовским [7] (см. также [12, § 65]).

Сначала рассмотрим общие свойства решений дисперсионного уравнения безграничной системы

$$D(k, \omega) = 0.$$

Будем считать, что система является эволюционной, т.е. существует конечная величина $P = \max_{k \in \mathbb{R}} \text{Im } \omega_j(k)$. Тогда при $\text{Im } \omega > P$ все решения $k_j = k_j(\omega)$ комплексны. Пронумеруем их в порядке убывания мнимой части при больших $\text{Im } \omega$ и разобьем на две группы: $\text{Im } k_j > 0$, $j = 1, \dots, s$, и $\text{Im } k_j < 0$, $j = s + 1, \dots, N$. Волны, соответствующие волновым числам из первой (второй) группы, будем называть движущимися *слева направо* (соответственно *справа налево*).

Рассмотрим частотное уравнение (3.8):

$$\begin{vmatrix} a_{11}e^{-ik_1L/2} & a_{12}e^{-ik_2L/2} & \dots & a_{1N}e^{-ik_NL/2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1}e^{-ik_1L/2} & a_{s2}e^{-ik_2L/2} & \dots & a_{sN}e^{-ik_NL/2} \\ a_{(s+1)1}e^{ik_1L/2} & a_{(s+1)2}e^{ik_2L/2} & \dots & a_{(s+1)N}e^{ik_NL/2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1}e^{ik_1L/2} & a_{N2}e^{ik_2L/2} & \dots & a_{NN}e^{ik_NL/2} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.9}$$

где $a_{ij} = a_{ij}(k_j(\omega), \omega)$. При $L \rightarrow \infty$ старший член этого определителя является произведением экспоненциального множителя

$$e^{-i(k_1(\omega) + \dots + k_s(\omega) - k_{s+1}(\omega) - \dots - k_N(\omega))L/2}$$

и двух миноров матрицы A : один имеет порядок s и занимает левый верхний угол, другой имеет порядок $n - s$ и занимает правый нижний угол этой матрицы. Следующий по старшинству экспоненциальный член отличается от первого на

$$e^{i(k_s(\omega) - k_{s+1}(\omega))L},$$

а коэффициент при нем является произведением таких же миноров матрицы, получаемой из A перестановкой s -го и $(s + 1)$ -го столбцов. Таким образом, сохраняя два главных члена в уравнении (3.9), получаем

$$|A_s| \cdot |A_{N-s}| + |A'_s| \cdot |A'_{N-s}| e^{i(k_s(\omega) - k_{s+1}(\omega))L} = 0. \quad (3.10)$$

Решения уравнения (3.10) при $L \gg 1$ распадаются на две группы.

1. Если $\text{Im } k_s(\omega) \neq \text{Im } k_{s+1}(\omega)$, то при $L \rightarrow \infty$ равенство (3.10) дает

$$|A_s(\omega)| \cdot |A_{N-s}(\omega)| = 0. \quad (3.11)$$

Собственные частоты, определяемые этим уравнением, называются *односторонними* (смысл этого названия будет объяснен ниже). Если хотя бы одна из них имеет положительную мнимую часть, то система неустойчива, в этом случае неустойчивость также называется *односторонней*.

2. Если уравнение (3.11) не выполнено, то при $L \rightarrow \infty$ из (3.10) с необходимостью вытекает равенство

$$\text{Im } k_s(\omega) = \text{Im } k_{s+1}(\omega). \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) определяет кривую Ω на комплексной плоскости ω , которая обладает следующим свойством: в окрестности любой ее точки всегда найдется частота, удовлетворяющая (3.10), и наоборот, любая такая частота (не являющаяся односторонней) лежит в окрестности этой кривой. Таким образом, собственные частоты, не являющиеся односторонними, хотя и образуют дискретный набор, располагаются около кривой Ω , находясь к ней тем ближе и заполняя ее тем плотнее, чем больше протяженность системы L . Если часть Ω находится в верхней полуплоскости ω , то собственные частоты, расположенные около этой части кривой, соответствуют неустойчивым возмущениям. Спектр, определяемый равенством (3.12), и неустойчивость, вызванная этим спектром, называются *глобальными* (смысл названия будет объяснен ниже).

При выводе равенства (3.12) предполагалось, что взаимное расположение величин $\text{Im } k_j$ внутри каждой группы не меняется при изменении ω . В общем случае кривая Ω , около которой располагаются собственные частоты, определяется уравнением

$$\min_{1 \leq j \leq s} \text{Im } k_j(\omega) = \max_{s+1 \leq j \leq N} \text{Im } k_j(\omega). \quad (3.13)$$

Таким образом, при достаточно больших L спектр частот разбивается на односторонний и глобальный. Точность такого разбиения тем выше, чем больше L , а именно чем точнее переход от (3.9) к (3.10), а затем к (3.11) и (3.12).

3.3. Физический смысл односторонней неустойчивости. Пусть для определенности в равенстве (3.11) обращается в нуль определитель $|A_s|$. Рассмотрим полубесконечную систему на интервале $x > -L/2$, для которой задано условие затухания при $x \rightarrow +\infty$. Решая систему уравнений для возмущений так же, как в п. 3.1, получим решение в виде (3.5). Отличие будет состоять в том, что в силу условия затухания при $x \rightarrow +\infty$ в (3.5) нужно оставить только s бегущих волн, уходящих от границы $x = -L/2$ и соответствующих волновым числам k_1, \dots, k_s . После подстановки модифицированного таким способом решения (3.5) в граничные условия при $x = -L/2$ получим систему линейных алгебраических уравнений с матрицей A_s для определения амплитуд C_j . Решая ее и вычисляя аналог интеграла (3.6), получим, что спектр собственных частот полубесконечной системы определяется частотным уравнением

$$|A_s| = 0.$$

В случае, когда в (3.11) обращается в нуль определитель $|A_{N-s}|$, нужно рассматривать полубесконечную систему на интервале $x < L/2$ с условием затухания при $x \rightarrow -\infty$.

Отсюда следует, что односторонний спектр конечной системы представляет собой объединение спектров систем, бесконечно протяженных в одном и в другом направлении, чем и объясняется его название.

Отметим, что односторонняя неустойчивость определяется только граничными условиями, заданными отдельно на правом и левом концах системы, и не зависит от сочетания этих условий.

3.4. Физический смысл глобальной неустойчивости. Для определенности будем считать, что взаимное расположение величин $\text{Im } k_j$ внутри каждой группы не меняется при изменении ω и уравнением для кривой Ω является равенство (3.12).

Представим, что на одном из концов системы, например при $x = -L/2$, возбуждается возмущение в виде s бегущих волн, уходящих от этого конца:

$$\sum_{j=1}^s C_s e^{i(k_j x - \omega t)}.$$

Когда они достигают правого конца $x = L/2$, амплитуда одной из волн, а именно s -й, значительно превосходит амплитуды остальных волн, поскольку k_j пронумерованы в порядке убывания мнимой части. Следовательно, остальные волны можно не учитывать при определении амплитуд волн, отраженных от правого конца. Когда $N - s$ отраженных волн, уходящих от правого конца, возвращаются к левому концу, по аналогичной причине можно пренебречь амплитудами всех волн, кроме $(s + 1)$ -й.

Таким образом, при больших L в процессе отражений доминирующую роль играют две бегущие в противоположные стороны волны, а именно s -я и $(s + 1)$ -я. Эта ситуация показана на рис. 3, а.

Вычислим амплитуды, которые имеют эти волны в различные моменты времени. Когда волна $C_s e^{i(k_s x - \omega t)}$, возбужденная на левом конце, достигает правого конца, ее амплитуда равна $C_s e^{-\text{Im } k_s L/2}$ (множитель $e^{-i\omega t}$ можно не учитывать, так как он одинаков для всех волн). После отражения она превратится в волну $A_{s,s+1} C_s e^{-\text{Im } k_s L/2} e^{\text{Im } k_{s+1} L/2} e^{i(k_{s+1} x - \omega t)}$, где $A_{s,s+1}$ — коэффициент отражения s -й волны в $(s + 1)$ -ю на правом конце. Когда последняя достигнет левого конца, ее амплитуда будет равна $A_{s,s+1} C_s e^{-\text{Im } k_s L/2} e^{\text{Im } k_{s+1} L}$. После отражения она превратится в волну $A_{s+1,s} A_{s,s+1} C_s e^{-\text{Im } k_s L/2} e^{\text{Im } k_{s+1} L} e^{-\text{Im } k_s L/2} e^{i(k_s x - \omega t)}$, где $A_{s+1,s}$ — коэффициент отражения $(s + 1)$ -й волны в s -ю при $x = -L/2$.

В случае, когда амплитуда и фаза s -й волны после двух отражений будут совпадать с исходными, описанный процесс будет повторяться циклически, т.е. будет представлять собой собственную функцию. Условие неизменности амплитуды имеет вид

$$A_{s+1,s} A_{s,s+1} e^{\text{Im}(k_{s+1} - k_s)L} = 1.$$

При больших L оно может быть выполнено, только если $\text{Im } k_s(\omega) \approx \text{Im } k_{s+1}(\omega)$, т.е. при ω , лежащих в окрестности кривой (3.12). С другой стороны, в окрестности любой точки, определяемой равенством (3.12), можно найти частоту, при которой не только амплитуда, но и фаза волны после двойного отражения будут совпадать с исходными, т.е. процесс отражений будет представлять собой собственное колебание.

Итак, глобальные собственные функции представляют собой суперпозицию двух наиболее усиливающихся (наименее быстро затухающих) и движущихся в противоположные стороны волн, при которой на концах системы они превращаются друг в друга (рис. 3, б). Как видно из (3.12), спектр глобальных собственных частот не зависит от конкретных граничных условий

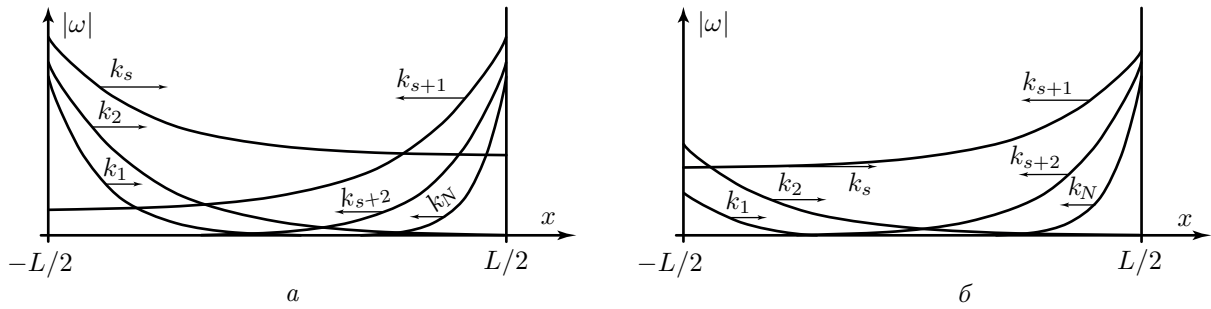


Рис. 3. Иерархия волн в системе конечной протяженности (а); взаимное превращение k_s в k_{s+1} и наоборот при отражениях от границ в собственной функции (б). Стрелками показаны направления движения волн

при $x = \pm L/2$, а определяется лишь характером системы внутри интервала $-L/2 < x < L/2$. В этом и заключается смысл слова “глобальные”.

3.5. Слабая глобальная неустойчивость. В случае, когда неустойчивость является слабой, можно представить более простой механизм образования собственной функции.

Пусть один из параметров задачи, который обозначим через $\mu \in \mathbb{R}$, является малым, причем при $\mu = 0$ система является нейтрально устойчивой. Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\mathcal{D}(k, \omega, \mu) = 0,$$

а его решения суть $k_j = k_j(\omega, \mu)$. Рассмотрим вещественную собственную частоту $\omega_R \in \mathbb{R}$, лежащую на кривой Ω при $\mu = 0$, т.е. такую, что

$$\text{Im } k_s(\omega_R, 0) = \text{Im } k_{s+1}(\omega_R, 0). \tag{3.14}$$

Придадим этой частоте приращение $i\omega_I$, где $\omega_I \in \mathbb{R}$, $|\omega_I| \ll 1$, и найдем такое ω_I , что эта частота будет лежать на кривой Ω при $\mu \neq 0$, $|\mu| \ll 1$. Имеем

$$k_j(\omega_R + i\omega_I, \mu) = k_j(\omega_R, 0) + i \frac{\omega_I}{g(\omega_R)} + \Delta(k_j(\omega_R, 0), \omega)\mu,$$

$$\Delta = \left. \frac{\partial k_j}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = - \left. \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k_j} \right)^{-1} \right|_{\mu=0}, \quad g(\omega_R) = \left. \left(\frac{\partial k_j}{\partial \omega} \right)^{-1} \right|_{\mu=0}.$$

Уравнение $\text{Im } k_s(\omega_R + i\omega_I, \mu) = \text{Im } k_{s+1}(\omega_R + i\omega_I, \mu)$ для кривой Ω сводится к выражению для приращения частоты

$$\omega_I(\omega_R) = \mu \left(\text{Re } \frac{\partial k_s}{\partial \omega} - \text{Re } \frac{\partial k_{s+1}}{\partial \omega} \right)^{-1} \text{Im} (\Delta(k_{s+1}, \omega_R) - \Delta(k_s, \omega_R)) \mu.$$

По определению $\text{Im } k_s$ должно увеличиваться при увеличении ω_I , а $\text{Im } k_{s+1}$ — уменьшаться, откуда

$$\text{Re } \frac{\partial k_s}{\partial \omega} > 0, \quad \text{Re } \frac{\partial k_{s+1}}{\partial \omega} < 0.$$

Система будет неустойчивой в случае, когда $\omega_I(\omega_R) > 0$ хотя бы для одного вещественного ω_R , откуда получаем критерий неустойчивости

$$\text{Im } \Delta(k_{s+1}, \omega_R) > \text{Im } \Delta(k_s, \omega_R). \tag{3.15}$$

Физический смысл этого критерия состоит в следующем. При $\mu = 0$ усиления волны $e^{ik_s x}$, бегущей слева направо, и волны $e^{ik_{s+1} x}$, бегущей справа налево, совпадают, что выражается равенством (3.14). При $\mu \neq 0$ и той же вещественной частоте ω_R эти усиления становятся разными, поскольку в общем случае $\text{Im } \Delta(k_s, \omega_R) \neq \text{Im } \Delta(k_{s+1}, \omega_R)$. Если усиление волны, бегущей в одном направлении, будет превышать затухание волны, бегущей в другом направлении (что и выражает условие (3.15)), то в результате процесса движения и взаимного отражения этих двух волн при *вещественной* частоте амплитуда будет увеличиваться при каждом цикле отражений. В итоге возмущение будет экспоненциально усиливаться, что и означает неустойчивость.

Этот усиливающийся процесс отражений не является собственной функцией, так как условие (3.12) не выполнено при вещественном ω_R и $\mu \neq 0$. Однако собственную функцию можно получить, придав частоте приращение $i\omega_I(\omega_R)$. Сам процесс отражений при этом не будет усиливаться, однако усиление будет происходить за счет наличия у частоты положительной мнимой части. Таким образом, в случае слабой глобальной неустойчивости возможны два эквивалентных представления образования собственной функции — усиливающиеся отражения при вещественной частоте и отражения при частоте, сдвинутой на $i\omega_I$, при которых сохраняются амплитуда волн.

4. ГЛОБАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ В ПОТОКЕ ГАЗА

4.1. Результаты исследований кривой Ω . До сих пор критерий неустойчивости протяженных систем рассматривался в общем виде. Рассмотрим результаты его приложения к задаче устойчивости пластины в форме полосы (см. рис. 1, *a*) в потоке газа [21, 22]. Дисперсионное уравнение для волн в безграничной пластине, полученное из решения системы (2.6), (2.7), имеет вид

$$(Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2) - \mu \frac{(\omega - Mk)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk)^2}} = 0. \quad (4.1)$$

Первое слагаемое выражает вклад упругих и инерционных сил пластины, второе — действие потока газа. Условие излучения требует выбора следующей ветви квадратного корня:

$$\text{Re} \sqrt{k^2 - (\omega - Mk)^2} > 0, \quad \text{Im } \omega \rightarrow +\infty.$$

Дисперсионное уравнение (4.1) имеет четыре корня: k_1, k_2 , принадлежащие первой группе, и k_3, k_4 , принадлежащие второй. При $\mu = 0$ они соответствуют изгибным волнам, распространяющимся по пластине в пустоте. Исследование показывает, во-первых, что односторонние собственные функции при типичных граничных условиях защемления, шарнирного опирания и свободного края отсутствуют. Во-вторых, глобальная неустойчивость может иметь место [21, 22], причем кривая Ω в общем случае состоит из двух частей Ω_1 и Ω_2 , отвечающих за два разных механизма неустойчивости (рис. 4). Результаты [21, 22] получены в предположении малости параметра μ , что практически всегда справедливо при реалистичных параметрах задачи: плотности газов в 1000 и более раз меньше, чем плотности типичных конструкционных материалов, так что $\mu \lesssim 10^{-3}$.

В области достаточно высоких частот $\omega \gtrsim \mu^{2/3}$ расположена кривая Ω_1 , определяемая соотношением

$$\text{Im } k_1 > \text{Im } k_2(\omega) = \text{Im } k_3(\omega) > \text{Im } k_4,$$

причем k_2 и k_3 при отсутствии газа соответствуют синусоидальным волнам, движущимся в противоположные стороны. При

$$M > M_w + 1 \quad (4.2)$$

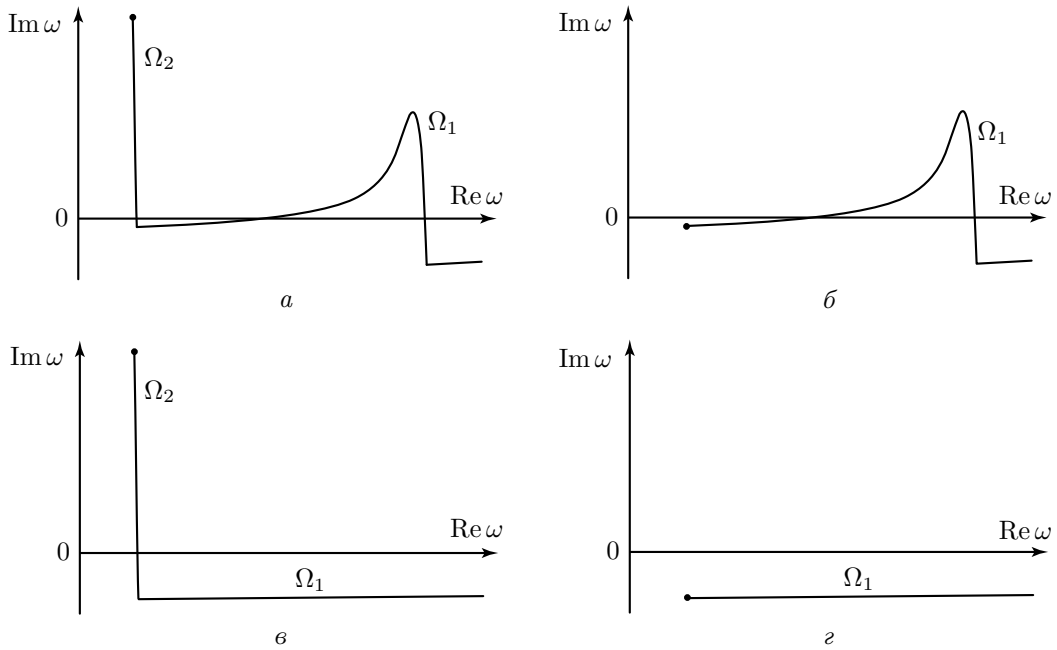


Рис. 4. Типичная форма кривой Ω : *a* — в случае одновременно одномодового и связанного флаттера; *б* — в случае только одномодового флаттера; *в* — в случае только связанного флаттера; *г* — в случае устойчивости. Кружком показан конец кривой Ω — точка ветвления k_2 и k_4 (*a*, *в*) или k_2 и k_3 (*б*, *г*)

она имеет участок, лежащий в верхней полуплоскости ω , который имеет характерный “горб”, соответствующий наиболее быстро растущим собственным функциям (рис. 5). А именно, при выполнении условия (4.2) в верхнюю полуплоскость она выходит на интервале $\omega^{**} < \text{Re } \omega < \omega^*$, где

$$\omega^* = (M - 1) \sqrt{\frac{(M - 1)^2 - M_w^2}{D}},$$

$$\omega^{**} = \sqrt{\frac{(M^2 + 1 - \sqrt{4M^2 + 1})(M^2 + 1 - \sqrt{4M^2 + 1} - M_w^2)}{D}},$$

что соответствует диапазону фазовых скоростей

$$\sqrt{M^2 + 1 - \sqrt{4M^2 + 1}} < c < M - 1.$$

При этом ω^{**} вещественна только при $M > \sqrt{\sqrt{4M_w^2 + 1} + M_w^2 + 1}$; в случае

$$1 < M < \sqrt{\sqrt{4M_w^2 + 1} + M_w^2 + 1}$$

кривая Ω_1 лежит в верхней полуплоскости на всем интервале $0 < \text{Re } \omega < \omega^*$. Частота ω_{\max} , при которой достигается максимум $\text{Im } \omega$, лежит близко к ω^* : $|\omega_{\max} - \omega^*| \sim \mu^{2/3}$, поэтому с высокой точностью можно принять $\omega_{\max} \approx \omega^*$. Наибольшая скорость роста возмущений (“высота горба”) равна

$$\omega_{1,\max}(M, M_w, D, \mu) = \mu^{2/3} \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{(M - 1)^2 - M_w^2}{D} \right)^{1/6} \frac{(2(M - 1)^2 - M_w^2)^{1/3}}{(M - 1)^{4/3}} - \mu \frac{(2M - 1)^2}{4(M - 1)\sqrt{(2M - 1)^2 - 1}}.$$

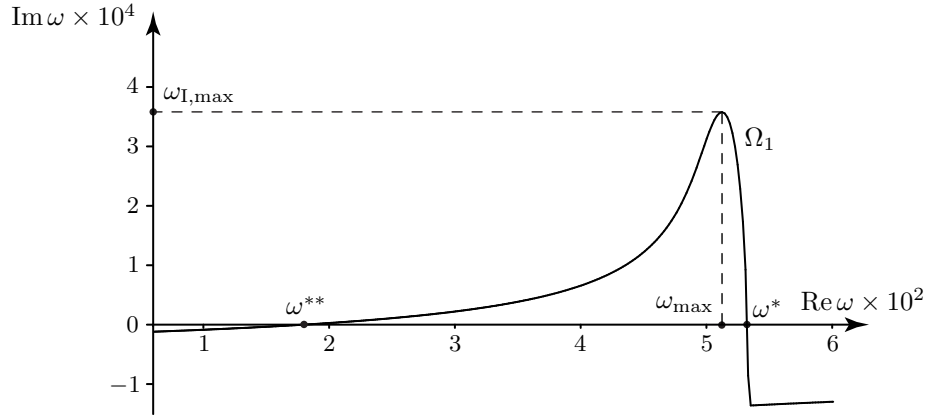


Рис. 5. Кривая Ω_1 при параметрах (4.3)

Вне диапазона $\omega^{**} < \text{Re } \omega < \omega^*$ кривая Ω_1 лежит в области $\text{Im } \omega < 0$, причем при $|\omega| \rightarrow \infty$ она асимптотически приближается снизу к горизонтальной оси. В случае отсутствия потока газа кривая Ω_1 совпадает с горизонтальной осью и описывает все возможные собственные колебания пластины в пустоте, поэтому собственные функции, частоты которых близки к Ω_1 , представляют собой модификацию потоком газа собственных мод в пустоте.

Пример расчета кривой Ω_1 показан на рис. 5 для параметров $M = 1.5$, $M_w = 0$,

$$D = 23.9, \quad \mu = 1.2 \times 10^{-4}, \quad (4.3)$$

где значения D и μ соответствуют стальной пластине в потоке воздуха на высоте 3000 м или алюминиевой пластине на высоте 11 000 м над уровнем моря.

При движении вдоль кривой Ω влево возможны две ситуации. Если натяжение M_w достаточно велико, то она оканчивается точкой ветвления корней $k_2 = k_3$; других частей, кроме Ω_1 , она не содержит (см. рис. 4, б, з). При натяжении

$$M_w < M_w^{\text{cr}} = \left(\frac{\sqrt{54}}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)^{1/3} D^{1/6} \quad (4.4)$$

возникает угловая точка кривой Ω , в которой $\text{Im } k_2 = \text{Im } k_3 = \text{Im } k_4$. Дальнейшее продолжение Ω задается соотношением

$$\text{Im } k_1 > \text{Im } k_2 = \text{Im } k_4 > \text{Im } k_3,$$

которое определяет часть Ω_2 (рис. 6). Она расположена почти вертикально и оканчивается точкой ветвления $k_2 = k_4$ (рис. 4, а, в). В отсутствие натяжения, т.е. при $M_w = 0$, положение этой точки ветвления найдено явно:

$$\hat{k} = \left(\frac{\mu M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)^{1/3} (4D)^{-1/3} e^{-i\pi/6}, \quad \hat{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\mu M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)^{2/3} (4D)^{-1/6} e^{i\pi/6}.$$

При $M_w = M_w^{\text{cr}}$ имеется промежуточное состояние: кривая Ω_2 состоит из одной тройной точки ветвления $k_2 = k_3 = k_4$, которая также является концом кривой Ω_1 , сама точка ветвления в плоскости ω в этом случае вещественна и имеет вид

$$\hat{k} = -\frac{i}{2} \left(\frac{\mu M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)^{1/3} D^{-1/3}, \quad \hat{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\mu M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)^{2/3} D^{-1/6}.$$

В случае, когда условие (4.4) выполнено, а (4.2) — нет, кривая Ω_1 целиком лежит в нижней полуплоскости и Ω выглядит, как показано на рис. 4, в.

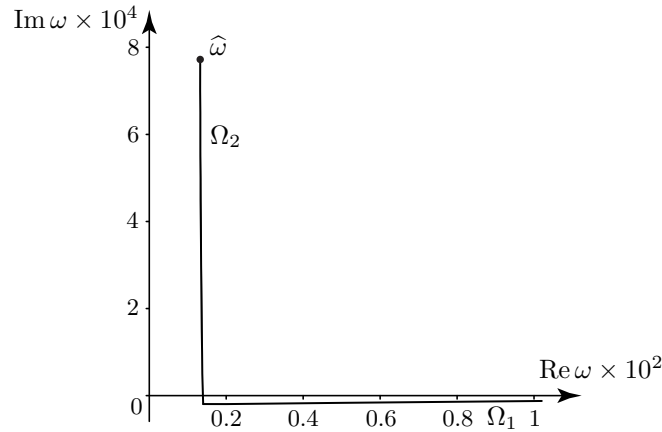


Рис. 6. Кривая Ω_2 при параметрах (4.3)

4.2. Поведение собственных мод пластины в потоке газа. Таким образом, могут существовать две области неустойчивости, определяемые критериями (4.2) и (4.4) соответственно. Более детальный анализ показал, что они отвечают двум разным физическим механизмам неустойчивости, называемым одномодовым флаттером и связанным флаттером (рис. 7). При одномодовом флаттере собственные частоты пластины под действием потока сдвигаются с вещественной оси (где они находятся при отсутствии потока) в верхнюю полуплоскость, т.е. возникает слабое (порядка μ) аэродинамическое усиление колебаний, называемое также отрицательным аэродинамическим демпфированием (рис. 7, а). При связанном типе флаттера две собственные частоты сближаются, почти сливаются, после чего расходятся в противоположных почти вертикальных направлениях: одна вниз, что соответствует сильно задемпфированной моде, другая вверх, что соответствует растущей моде (рис. 7, б). Таким образом, критерии (4.2) и (4.4) дают асимптотические границы каждого вида флаттера при $L \rightarrow \infty$. Важным обстоятельством является то, что других видов флаттера нет, поскольку кривая Ω может иметь только эти два участка в верхней полуплоскости.

Асимптотический критерий одномодового флаттера (4.2) может быть переписан в виде критерия неустойчивости для каждой собственной моды отдельно. При слабом влиянии потока на пластину собственные частоты пластины в потоке находятся в окрестности частот пластины в пустоте. С другой стороны, они находятся вблизи кривой Ω_1 , которая слабо отклоняется от вещественной оси (на величину порядка μ). Таким образом, можно приближенно считать $\text{Re } \omega_n$ совпадающими с частотами пластины в пустоте ω_{0n} , а $\text{Im } \omega_n$ найти из уравнения кривой Ω_1 . Варьирование длины пластины L приведет к изменению $\text{Re } \omega_n$, и частоты будут двигаться на комплексной плоскости вдоль Ω_1 , как бусинки, надетые на жесткую проволоку в форме этой кривой. В частности, для шарнирно опертой с обеих сторон пластины имеем

$$\text{Re } \omega_n \approx \omega_{0n} = \frac{\pi n}{L} \sqrt{D \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 + M_w^2}.$$

Если пластина достаточно короткая, то все $\text{Re } \omega_n > \omega^*$ и пластина устойчива. При увеличении ее длины L собственные частоты сдвигаются влево. Сначала первая частота проходит через “горб” кривой Ω_1 , что соответствует флаттеру по первой моде, затем вторая, и т.д. Неустойчивости по n -й моде соответствует расположение частоты ω_n между частотами ω^{**} и ω^* , откуда находится диапазон чисел Маха, соответствующий неустойчивости по этой моде:

$$M_n^* < M < M_n^{**}, \tag{4.5}$$

$$M_n^* = 1 + \sqrt{\lambda_n}, \quad M_n^{**} = \sqrt{1 + \lambda_n + \sqrt{4\lambda_n + 1}}, \quad \lambda_n = \frac{\sqrt{4D\omega_{0n}^2 + M_w^4} + M_w^2}{2}. \tag{4.6}$$

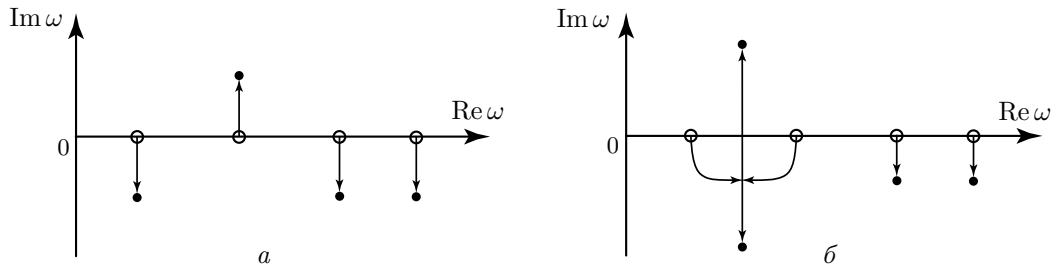


Рис. 7. Переход к неустойчивости при одномодовом (а) и связанном (б) флаттере

При нахождении в области одномодового флаттера различные моды не взаимодействуют между собой и имеют ту же структуру, что и в пустоте.

В отличие от одномодового флаттера, асимптотический метод не позволяет получить границу устойчивости связанного флаттера в каком-либо виде, аналогичном (4.5), поскольку влияние потока на собственные частоты становится существенным и предположение о том, что $\text{Re } \omega_n \approx \omega_{0n}$, уже неверно. Невыполнение критерия (4.4) дает лишь условия, при которых связанный флаттер не возникнет при сколько угодно большой длине пластины, однако если он выполняется, то без более детального анализа невозможно указать, при какой длине L произойдет переход к связанному флаттеру.

5. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И СРАВНЕНИЕ С АСИМПТОТИЧЕСКИМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

В то время как в одномерных задачах оценка точности асимптотического метода связана со скоростью затухания волн, не участвующих в образовании собственных функций, при удалении от границ, в данном случае этот подход недостаточен, поскольку рассматриваемая задача не полностью одномерна: пластина имеет конечную протяженность, тогда как область течения газа бесконечна. Поэтому наиболее целесообразно провести сравнение асимптотических результатов с численным решением задачи на собственные значения (2.6), (2.8). Такое сравнение проведено в [25, 27] для двумерной задачи (см. рис. 1, а), решенной методом Бубнова–Галеркина, где приведены подробности численного метода и исследование сходимости.

5.1. Сравнение результатов для ненапрянутой пластины. Сначала рассмотрим результаты для пластины без натяжения, т.е. $M_w = 0$, при безразмерных параметрах (4.3). На рис. 8 на плоскости (L, M) сплошными линиями показаны результаты расчета границ устойчивости первых шести форм колебаний, штриховыми линиями — асимптотические границы (4.6). Как видно, при достаточно больших L результаты расчетов практически совпадают, причем, как и в (4.6), $M_n^* \rightarrow 1$, $M_n^{**} \rightarrow \sqrt{2}$ при $L \rightarrow \infty$. При малых и умеренных L имеется два отличия. Во-первых, реальные области флаттера ограничены при уменьшении L : при $L < 57$ пластина устойчива, в то время как асимптотические границы неограничены, лишь $M^*, M^{**} \rightarrow \infty$ при $L \rightarrow 0$. Во-вторых, при $300 \leq L \leq 350$ имеется граница связанного флаттера, при переходе через которую границы одномодового флаттера по первым двум модам исчезают, так как именно эти моды становятся “связанными”. Однако это не влияет на одномодовый флаттер по более высоким модам, границы неустойчивости которых продолжают существовать в сторону больших L .

Для понимания природы одномодового флаттера рассмотрим движение собственных частот в плоскости ω . Для простоты будем рассматривать первые четыре частоты, так как поведение более высоких аналогично. При $L = 250$, $M = 1.6$ все частоты лежат в нижней полуплоскости (рис. 9) и соответствующие моды затухают. Будем уменьшать число Маха M при постоянном L . При $M = M_n^{**}$ (верхняя ветвь на рис. 8) n -я частота пересекает вещественную ось ω и перемещается в верхнюю полуплоскость; n -я мода становится растущей.

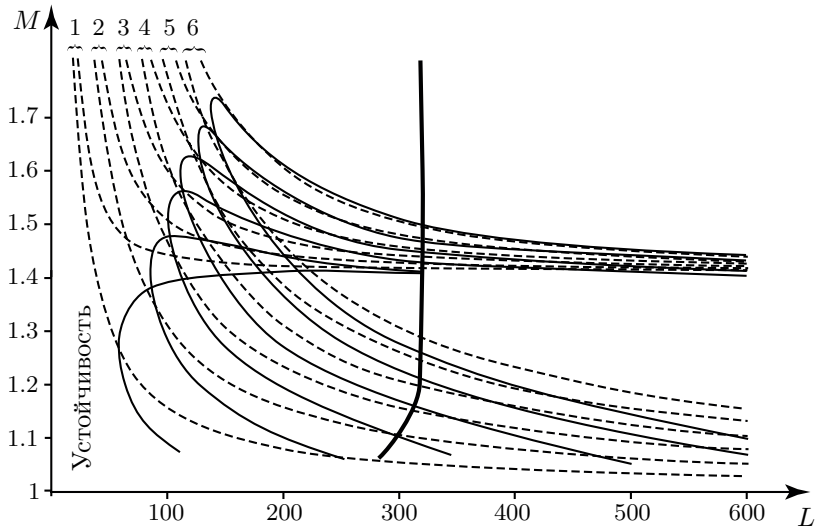


Рис. 8. Рассчитанные границы одномодового флаттера по первым шести модам (тонкие сплошные линии), асимптотические границы (4.6) (штриховые линии) и граница связанного флаттера (жирная линия)

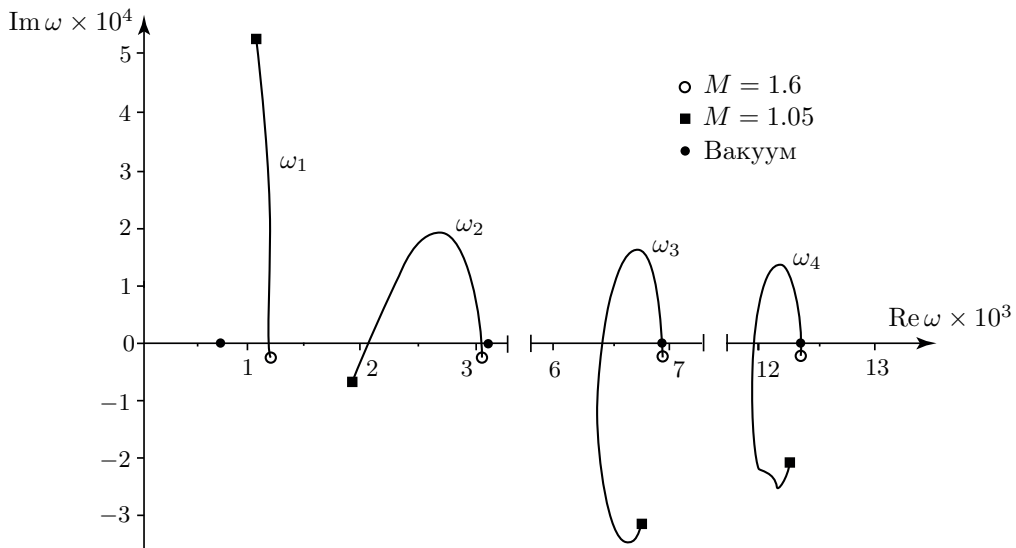


Рис. 9. Движение собственных частот в комплексной плоскости при параметрах (4.3), $L = 250$, $1.05 \leq M \leq 1.6$

Важной особенностью этого перехода к неустойчивости является то, что различные частоты не сближаются и не влияют друг на друга. Флаттер по каждой моде происходит независимо, по этой причине он назван “одномодовым”. При дальнейшем уменьшении M величина $\text{Im } \omega_n$ достигает максимума и уменьшается. При $M = M_n^*$ (нижняя ветвь на рис. 8) частоты снова пересекают вещественную ось и перемещаются в нижнюю полуплоскость; соответствующие моды становятся затухающими. Таким образом, n -я мода, $n = 1, \dots, 4$, находится в области одномодового флаттера при $M_n^* < M < M_n^{**}$.

Далее рассмотрим переход от устойчивости к одномодовому, а затем к связанному флаттеру при увеличении длины пластины. Возьмем сначала $M = 1.3$ и будем увеличивать L от 60 до 400. На рис. 10 сначала наблюдается одномодовый флаттер, возникающий при пересечении границ на рис. 8. Затем при $L \approx 320$ происходит слияние первой и второй частот, после чего $\text{Im } \omega_1$ быстро растет: от 4.5×10^{-5} при $L = 320$ до 4.77×10^{-4} при $L = 400$, в то время как

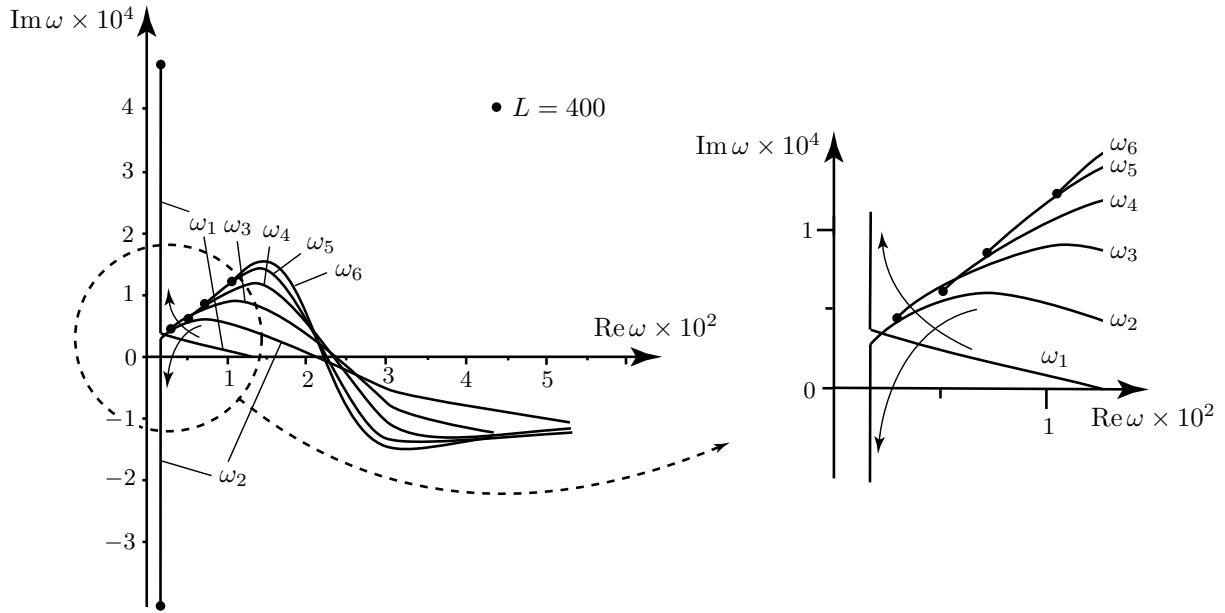


Рис. 10. Движение собственных частот в комплексной плоскости при параметрах (4.3), $M = 1.3$, $60 \leq L \leq 400$

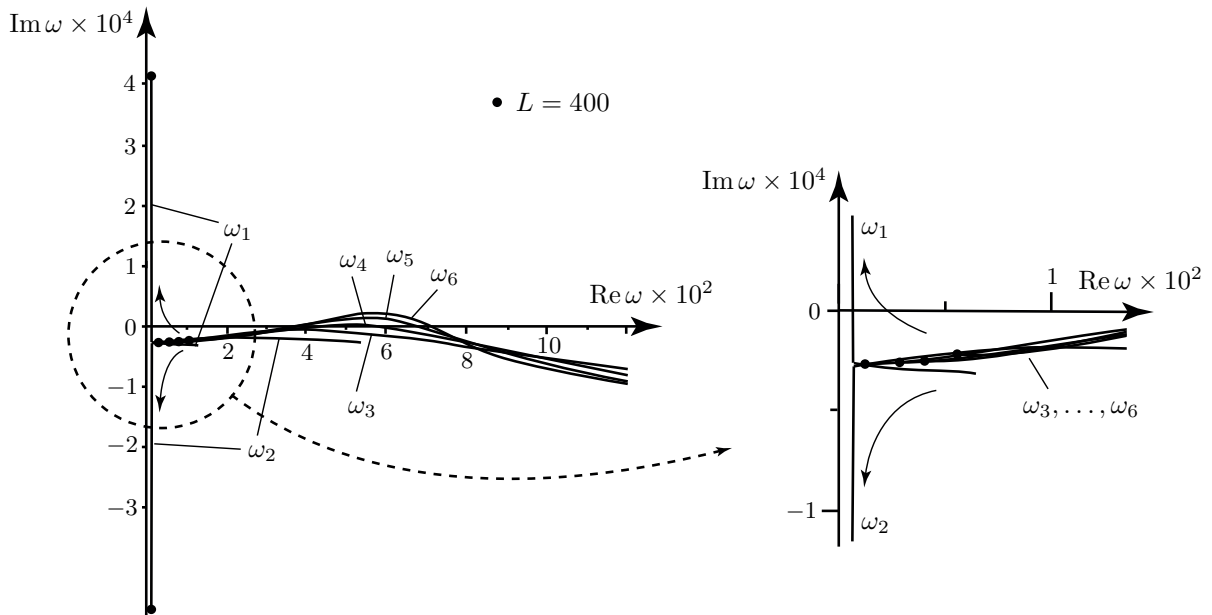


Рис. 11. Движение собственных частот в комплексной плоскости при параметрах (4.3), $M = 1.6$, $60 \leq L \leq 400$

$\text{Im } \omega_2$ быстро уменьшается: от 2.8×10^{-5} при $L = 320$ до -4.08×10^{-4} при $L = 400$. Поскольку в соответствии с рис. 8 при $M = 1.3$ переход к связанному флаттеру происходит из области одномодового, слияние происходит в верхней полуплоскости плоскости ω . Более высокие частоты ($n > 2$) остаются в верхней полуплоскости без сближения друг с другом; таким образом, имеются одновременно связанный флаттер по двум первым модам и одномодовый флаттер по более высоким модам.

Наконец, рассмотрим движение частот в случае, когда переход к связанному флаттеру происходит из области устойчивости. Возьмем $M = 1.6$ и будем увеличивать L снова от 60 до 400 (рис. 11). При $110 \leq L \leq 220$ наблюдается одномодовый флаттер по модам 4–6 в соответствии

Изменение границ одномодового флаттера при различных натяжения пластины (4.6) для параметров (4.3) при $L \rightarrow \infty$

σ , Па	M_w	M_n^*	M_n^{**}
0	0.0	1.000	1.414
8.1×10^6	0.1	1.100	1.425
32.4×10^6	0.2	1.200	1.455
72.9×10^6	0.3	1.300	1.502
129.6×10^6	0.4	1.400	1.562

с пересечением границ на рис. 8; моды 1–3 затухают при $L < 321$. При $L \approx 321$ моды 1 и 2 сливаются, однако в отличие от случая $M = 1.3$ слияние происходит в нижней полуплоскости. После слияния $\text{Im } \omega_1$ увеличивается от -2.7×10^{-5} при $L = 321$ до 4.13×10^{-4} при $L = 400$, в то время как $\text{Im } \omega_2$ уменьшается от -2.8×10^{-5} при $L = 321$ до -4.69×10^{-4} при $L = 400$. Таким образом, имеется переход к связанному флаттеру. Другие частоты ($n = 3, \dots, 6$) остаются в нижней полуплоскости ω , т.е. эти моды при $L > 321$ затухают.

5.2. Влияние натяжения на одномодовый флаттер. Из асимптотического критерия (4.6) следует, что числа Маха, при которых возникает флаттер, существенно растут при увеличении натяжения M_w . Например, для шарнирно опертой пластины с $L = 300$ из (4.6) видно, что даже при не слишком большом натяжении пластины с напряжением $\sigma = 129.6 \times 10^6$ Па нижняя граница флаттера $\min_n M_n^*$ увеличивается от 1.051 для ненапрянутой пластины до 1.403. Здесь и ниже в расчетах приняты параметры (4.3). В таблице показаны верхние и нижние границы флаттера, полученные из (4.6) для параметров (4.3) при $L \rightarrow \infty$ (зависимость M_n^* , M_n^{**} от n исчезает при $L \rightarrow \infty$).

Результаты расчетов полной задачи (2.6), (2.8) показаны на рис. 12 для $M_w = 0.2, 0.3, 0.4$. При $M_w = 0.2$ видно незначительное изменение границ флаттера, особенно по первой моде: верхняя ветвь несколько смещается вниз, нижняя — вверх, левая часть границы смещается вправо. Для других мод границы несколько смещаются вверх. Граница связанного флаттера смещается в область $M > 1.8$ и на представленном графике отсутствует.

При $M_w = 0.3$ граница флаттера по первой моде смещается в область $L \geq 500$ и виден лишь ее незначительный участок в диапазоне $500 \leq L < 600$. Для второй моды верхняя ветвь смещается вниз, нижняя — вверх, левая часть границы смещается вправо. Границы по модам 3–6 смещаются к более высоким M , и область неустойчивости становится уже.

При $M_w = 0.4$ границы мод 1, 2 смещаются в область $L > 600$, так что они не видны на рис. 12. Области неустойчивости по модам 3–6 смещаются к еще большим M и дальше сужаются. Левые участки границы по моде 3 существенно смещаются к большим L .

Таким образом, при увеличении M_w наблюдаются два эффекта в изменении областей неустойчивости. Во-первых, по всем модам области неустойчивости смещаются к более высоким M , которые при $L \rightarrow \infty$ близки к указанным в таблице значениям, полученным по асимптотическим формулам (4.6). Во-вторых, наблюдается смещение областей неустойчивости по низшим модам к более высоким L ; этот эффект не объясняется асимптотической теорией.

5.3. Сравнение границ связанного флаттера. Выше рассмотрены границы одномодового флаттера, при котором переход к неустойчивости происходит без взаимодействия между модами. При более высоких M и L переход к неустойчивости происходит через слияние частот, т.е. в виде связанного флаттера (рис. 8). С точки зрения глобальной неустойчивости это происходит, когда частоты расположены около вертикальной части кривой Ω (см. рис. 4), т.е. Ω_2 . Эта часть существует при выполнении условия (4.4).

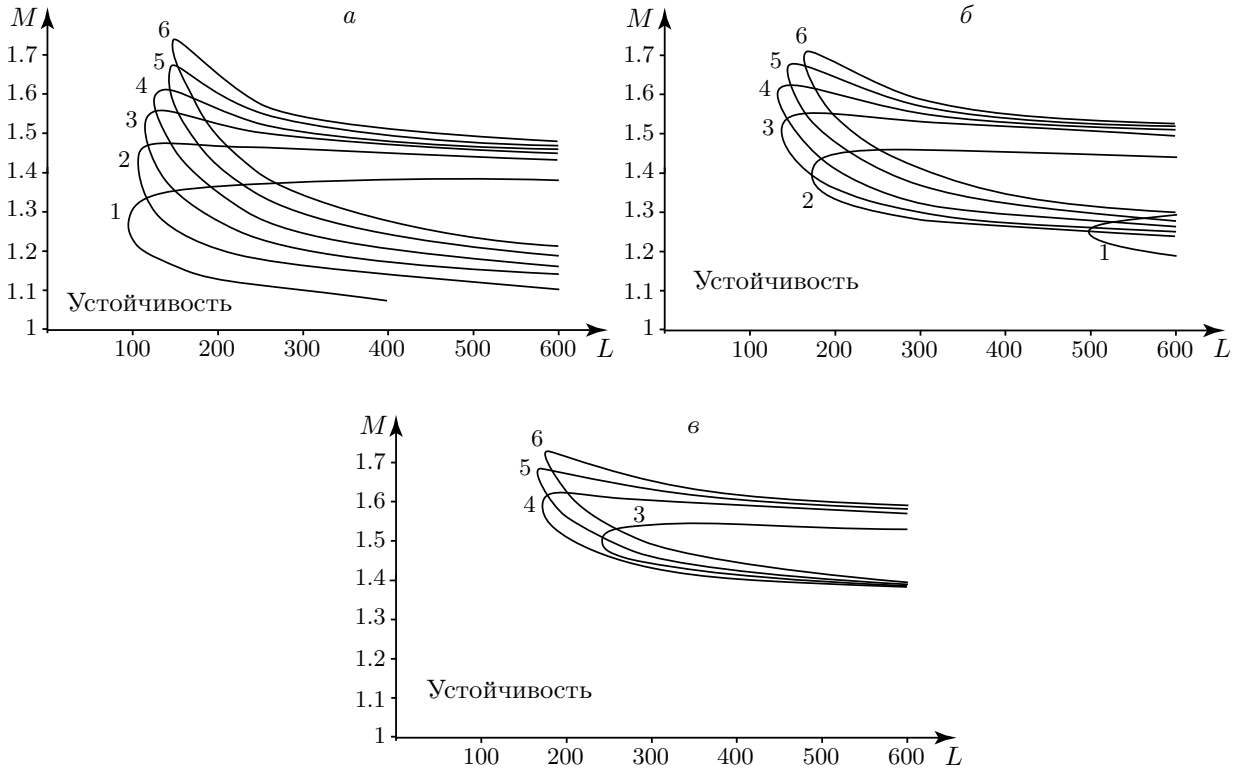


Рис. 12. Границы флаттера по первым шести модам в плоскости (L, M) при параметрах (4.3), $M_w = 0.2$ (*a*), 0.3 (*б*), 0.4 (*в*)

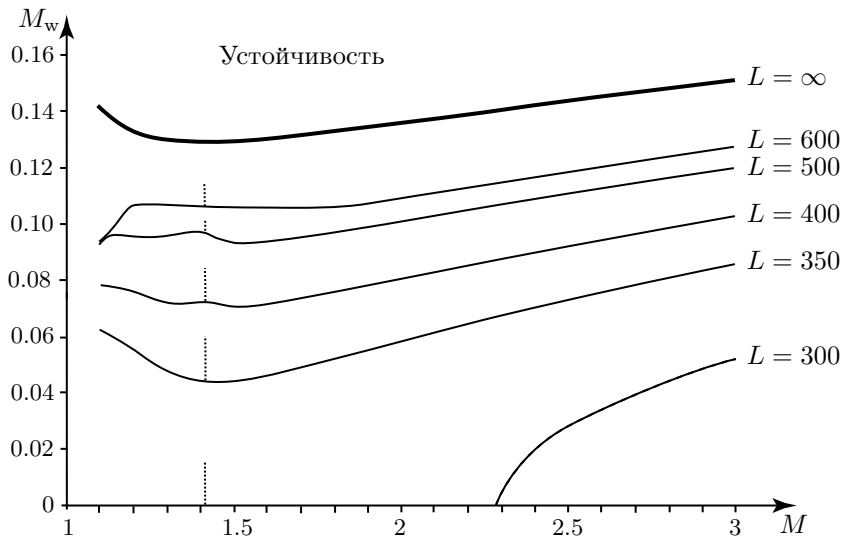


Рис. 13. Границы связанного флаттера на плоскости (M, M_w) при параметрах (4.3). Тонкие линии — результаты расчета при различных L , жирная — асимптотическая граница при $L \rightarrow \infty$ (4.4), пунктирные линии — границы одномодового флаттера (верхние ветви)

Неравенство (4.4) дает M_w порядка $\mu^{1/3}$, а поскольку μ — малая величина, даже незначительное натяжение устраняет связанный флаттер. Так как критерий (4.4) не зависит от L , при $M_w > M_w^{cr}$ связанный флаттер исчезает для любой пластины из заданного материала при заданных толщине и диапазоне чисел Маха независимо от того, насколько длинной она является.

Рассмотрим результаты расчета границ связанного флаттера, показанные на рис. 13 для параметров (4.3). Для каждого L имеется кривая $M_w = M_w(M)$ такая, что связанный флаттер отсутствует при $M_w \geq M_w(M)$ (заметим, что одномодовый флаттер при этом возможен). Кривая $M_w = M_w(M)$, полученная по асимптотической формуле (4.4) и обозначенная “ $L = \infty$ ”, лежит выше всех рассчитанных кривых для конечных L и в этом смысле представляет собой предельную границу связанного флаттера: натяжение, не удовлетворяющее (4.4), гарантирует отсутствие связанного флаттера для пластин любой длины. Таким образом, асимптотические результаты соответствуют результатам, полученным из решения полной задачи на собственные значения.

Интересной особенностью является то, что для подавления связанного флаттера требуется гораздо меньшее натяжение, чем для подавления одномодового флаттера. Действительно, на рис. 13 видно, что $M_w = 0.15$ достаточно для исключения связанного флаттера при любой длине пластины L вплоть до $M = 3.0$, в то время как при значительно большем натяжении $M_w = 0.4$ еще остается область одномодового флаттера на рис. 12 при $L > 174$ и $M < 1.74$.

6. ФЛАТТЕР ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН: АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Асимптотический метод для одномерных систем [7; 12, § 65] был обобщен на случай большего числа измерений [10]. Идея заключается в следующем: в случае достаточно больших размеров области, пренебрегая наиболее быстро затухающими волнами, можно построить замкнутые циклы отражений волн, которые представляют собой собственные функции. Это обобщение было использовано для построения границ одномодового флаттера прямоугольных пластин [23, 26].

6.1. Действие газа на собственное колебание. Рассмотрим собственную форму колебаний пластины в пустоте, характеризуемую числами полуволн m и n в направлениях x и y соответственно. Для простоты будем считать пластину шарнирно опертой, тогда колебание (стоячая волна) задается выражением

$$w(x, y, t) = \cos(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) e^{-i\omega t}. \quad (6.1)$$

В случае других граничных условий выражение (6.1) справедливо вне некоторой окрестности кромок в силу динамического краевого эффекта В.В. Болотина [2].

Представим колебание в виде суперпозиции четырех бегущих волн:

$$w(x, y, t) = \frac{1}{4} (e^{i\varphi_x} e^{ik_x x} + e^{-i\varphi_x} e^{-ik_x x}) (e^{i\varphi_y} e^{ik_y y} + e^{-i\varphi_y} e^{-ik_y y}) e^{-i\omega t} = \\ = C_1 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} + C_2 e^{i(k_x x - k_y y - \omega t)} + C_3 e^{i(-k_x x - k_y y - \omega t)} + C_4 e^{i(-k_x x + k_y y - \omega t)}. \quad (6.2)$$

Пронумеруем направления распространения волн в соответствии с номером слагаемого в (6.2) (рис. 14). Тогда образование стоячей волны можно представить следующим образом. На одной из кромок возбуждается бегущая волна, движущаяся, например, в направлении 1. Последовательно отражаясь от четырех кромок пластины, она превращается в волны, движущиеся в направлениях 2–4. При последнем отражении она превращается в исходную волну, после чего процесс циклически повторяется. После нескольких таких циклов движение четырех указанных волн приобретает установившийся характер, а их наложение приводит к образованию стоячей волны (6.1).

Пусть теперь пластина обтекается газом. Будем пренебрегать влиянием кромок пластины на возмущение потока и считать, что он действует на бегущие волны (6.2) так, как если бы они имели бесконечный размах. Зная влияние газа на такие волны, легко понять его влияние

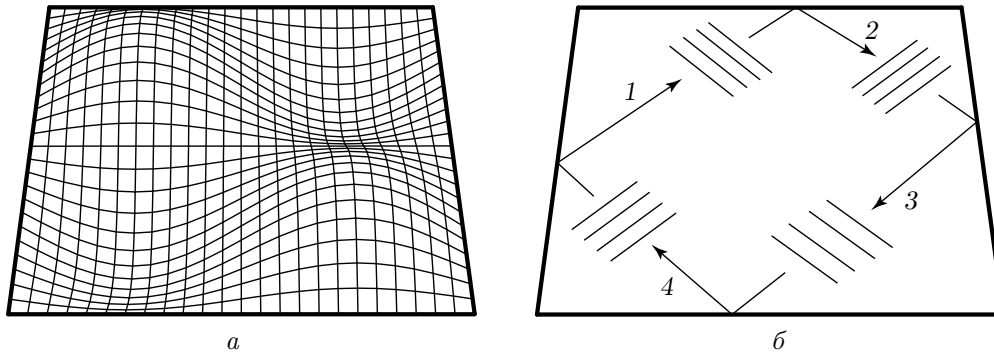


Рис. 14. Собственная форма колебаний пластины: *a* — стоячая волна; *б* — ее представление в виде суперпозиции четырех бегущих волн. Цифрами обозначены направления распространения волн

и на собственное колебание в целом. Действие потока на пространственное усиление волн бесконечного размаха исследовалось выше для двумерного случая, т.е. для случая, когда направление течения газа и волновой вектор возмущения совпадают. Ниже приводятся основные результаты с поправкой на то, что волны движутся под углом к потоку газа.

Рассмотрим j -ю плоскую волну $e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$ с волновым вектором $\{k_x, k_y\} = \{k \cos(\alpha_j + \theta), k \sin(\alpha_j + \theta)\}$, $j = 1, 2, 3, 4$, бегущую по воображаемой безграничной пластине, обтекаемой газом. Здесь α_j — угол между вектором скорости газа и волновым вектором, θ — угол между направлением течения и осью x , $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $\text{Re } k > 0$. В отсутствие газа k вещественно и положительно, при наличии газа k в общем случае комплексно. Положительное $\text{Im } k$ соответствует затуханию волны в направлении ее распространения, отрицательное — усилению волны.

Дисперсионное уравнение системы пластина–газ имеет вид (4.1) с поправкой на то, что вектор скорости газа спроектирован на плоскость движения волны:

$$(Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2) - \mu \frac{(\omega - Mk \cos \alpha_j)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk \cos \alpha_j)^2}} = 0. \quad (6.3)$$

Обозначая через $k_0(\omega) = k(\omega, 0)$ длину волнового вектора в отсутствие газа ($\mu = 0$) и считая μ малым параметром, из (6.3) получаем

$$k(\omega, \mu) = k_0 + \Delta(k_0)\mu,$$

где $\Delta(k_0)$ — главный член разложения $k(\mu)$ при малых μ .

Рассмотрим теперь действие газа на собственное колебание. Для этого удобно представлять движение волны как движение ее отдельных участков (рис. 15). Траектории этих участков между кромками являются отрезками прямых линий, имеющих одно из четырех направлений (рис. 14, б), а от кромок происходит зеркальное отражение. В зависимости от рассматриваемой формы колебаний траектории могут быть замкнутыми (рис. 16, а, б) и незамкнутыми (рис. 16, в). Замкнутая траектория является замкнутой ломаной. Нетрудно показать, что незамкнутая траектория является всюду плотной в прямоугольнике, очерчиваемом контуром пластины.

Будем называть циклом отражений участков волны период времени, за который их траектории вернутся в начальные точки (в случае замкнутой траектории) или окажутся близко к ним (в случае незамкнутой). Вычисляя вдоль каждой траектории изменение амплитуды за такой цикл, мы найдем изменение амплитуды и для волны в целом, поскольку траектории

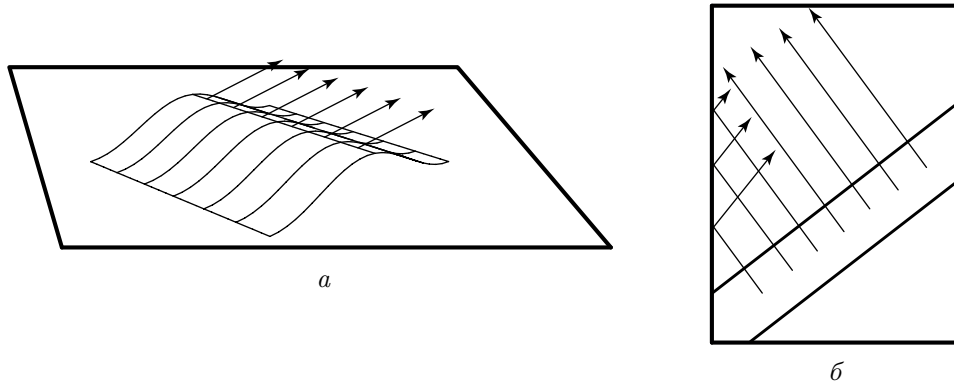


Рис. 15. Представление движения волны как движения ее отдельных участков (а) и начальные траектории движения этих участков (б)

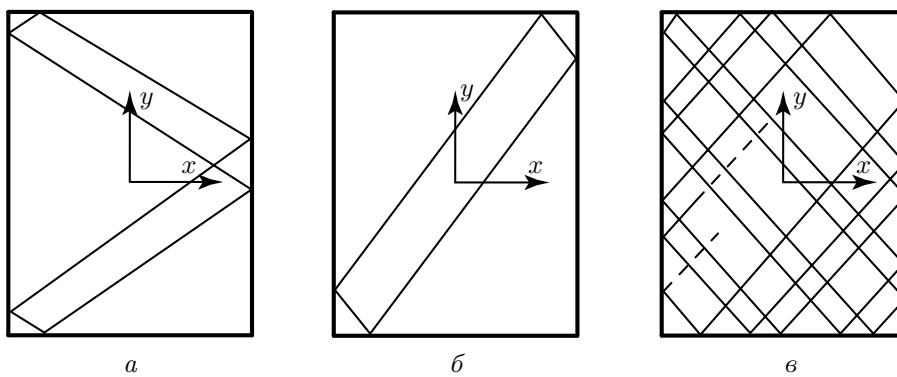


Рис. 16. Траектории движения участков волны: а — замкнутая траектория, симметричная относительно одной из осей координат; б — замкнутая траектория, несимметричная относительно осей координат; в — незамкнутая траектория

покрывают всю поверхность пластины. Если на разных траекториях усиление амплитуды будет разным, то плоская волна перестанет быть таковой. В этом случае могут проявляться эффекты дифракции, которые рассматривались в [26].

Рассмотрим какую-нибудь траекторию и вычислим изменение амплитуды за цикл отражений. Оно происходит, во-первых, при движении волны от одной кромки до другой из-за наличия мнимой части волнового числа (движение вдоль звеньев траектории) и, во-вторых, при отражениях на краях пластины. Полагая начальную амплитуду равной единице и рассматривая последовательно изменения амплитуды при движении между кромками и при отражениях, получаем амплитуду после цикла отражений (считается, что за указанный промежуток времени произошло n отражений):

$$\prod_{p=1}^n A_p e^{(-l_1 \operatorname{Im} \Delta(k_1) - l_2 \operatorname{Im} \Delta(k_2) - l_3 \operatorname{Im} \Delta(k_3) - l_4 \operatorname{Im} \Delta(k_4))\mu}. \tag{6.4}$$

Здесь A_i — коэффициенты отражения на краях, l_j — суммарные расстояния, проходимые траекторией вдоль j -го направления. Так как в отсутствие газа амплитуда после цикла отражений не меняется (поскольку пластина сама по себе является консервативной системой), то $\prod_{p=1}^n A_p = 1$. Далее, очевидно, что $l_1 = l_3$, $l_2 = l_4$ (в случае незамкнутой траектории эти равенства верны приближенно). Поэтому окончательно условие усиления колебания принимает вид

$$l_1 \operatorname{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3)) + l_2 \operatorname{Im}(\Delta(k_2) + \Delta(k_4)) < 0. \tag{6.5}$$

Таким образом, условие (6.5) позволяет определить наличие или отсутствие роста амплитуды для каждой траектории заданной формы колебаний. Если такой рост будет происходить на всех траекториях, то и само колебание будет усиливаться; если же на всех траекториях амплитуда будет уменьшаться, то колебание будет затухать. Если на части траекторий амплитуда увеличивается, а на части уменьшается, то суммарное поведение будет определяться дифракцией волн, этот случай рассматривается в [26].

6.2. Построение собственной функции. Приведенный выше метод вычисления пространственного усиления волны полностью аналогичен двумерному случаю (п. 3.5). Вычислим теперь скорость временного усиления колебания. Для этого придадим частоте $\omega_R \in \mathbb{R}$ малую добавку $i\omega_I$ такую, что амплитуда участка волны после цикла отражений останется неизменной.

Так как

$$k(\omega_R + i\omega_I, \mu) = k_0 + \frac{i\omega_I}{g(\omega_R)} + \Delta(k_0)\mu,$$

где $g(\omega) = (\partial k_0(\omega)/\partial \omega)^{-1}$ — групповая скорость волн, то изменение амплитуды после цикла отражений, вычисленное аналогично (6.4), выражается формулой

$$\prod_{p=1}^n A_p e^{(-l_1 \operatorname{Im} \Delta(k_1) - l_2 \operatorname{Im} \Delta(k_2) - l_3 \operatorname{Im} \Delta(k_3) - l_4 \operatorname{Im} \Delta(k_4))\mu - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\omega_I/g(\omega_R)}.$$

Поскольку эта величина должна быть равна единице, показатель при экспоненте равен нулю, откуда получаем искомую добавку

$$\omega_I = -\mu g(\omega_R) \frac{l_1 \operatorname{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3)) + l_2 \operatorname{Im}(\Delta(k_2) + \Delta(k_4))}{2(l_1 + l_2)}. \quad (6.6)$$

Итак, как и для двумерного случая (п. 3.5), мы получили, что образование растущей собственной функции прямоугольной пластины можно представлять двумя способами: или как усиливающийся процесс отражений при вещественной частоте, или как отражения, сохраняющие амплитуду, при комплексной частоте [10]. Второй механизм при подходящем ω_R (таком, чтобы не только амплитуда, но и фаза сохранялась после цикла отражений — в этом случае процесс “зацикливается”) представляет собой растущее собственное колебание.

6.3. Вектор скорости газа параллелен одной из сторон пластины. Далее ограничимся частным случаем, когда поток направлен вдоль оси x , т.е. перпендикулярно передней кромке, пластина шарнирно оперта, а натяжение отсутствует (общий случай рассмотрен в [23, 26]). В этом случае в силу симметрии $\Delta(k_1) = \Delta(k_2)$, $\Delta(k_3) = \Delta(k_4)$. Тогда условие (6.5) роста амплитуды волны за рассматриваемый цикл отражений сводится к условию

$$\operatorname{Im} \Delta(k_1) < -\operatorname{Im} \Delta(k_3), \quad (6.7)$$

выражающему следующий факт: усиление волн 1 и 2, бегущих в направлении потока газа, должно превышать затухание волн 3 и 4, бегущих против потока. Отметим, что, поскольку для выбранной формы колебаний траектории отличаются друг от друга только начальной точкой, а направления их движения совпадают, изменение амплитуды после цикла отражений и условие (6.7) не зависят от траектории, а определяются только формой колебаний.

Вычисляя $\Delta(k_j)$ из (6.3) и решая неравенство (6.7), получаем асимптотические границы одномодового флаттера для каждой моды, аналогичные двумерным границам (4.6):

$M^*(L_x, L_y) < M < M^{**}(L_x, L_y)$, где

$$M^*(L_x, L_y) = \sqrt{1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\frac{L_x}{L_y}\right)^2} (1 + \sqrt{Dk_0^2}),$$

$$M^{**}(L_x, L_y) = \sqrt{1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\frac{L_x}{L_y}\right)^2} \sqrt{1 + Dk_0^2 + \sqrt{4Dk_0^2 + 1}},$$
(6.8)

m и n — числа полуволн собственной формы в направлении осей x и y ,

$$k_0 = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2}.$$

Заметим, что уменьшение L_y при фиксированном L_x приводит к увеличению углов α_j между волнами и потоком и соответственно к увеличению чисел Маха, при которых происходит усиление.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И СРАВНЕНИЕ С АСИМПТОТИЧЕСКИМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

Путем численного решения задачи (2.6), (2.8) для четырех собственных частот ω_j^1 ($j = 1, \dots, 4$) рассчитаны границы области неустойчивости в плоскости (L_x, M) , т.е. линии уровня $\text{Im } \omega_j^1 = 0$. Все расчеты проводились при параметрах задачи (4.3). Расчеты проведены для двух конфигураций пластин: серия пластин (см. рис. 1, б) [31] и одиночная пластина (см. рис. 1, в). Различие между этими конфигурациями проявляется только в аэродинамике. В случае серии каждая пластина испытывает влияние соседних пластин, области влияния которых попадают на данную пластину. В случае одиночной пластины распределение давления иное, поскольку окружающих пластин нет.

Рассмотрим рис. 17, где изображены границы области неустойчивости по первой моде (частота ω_1^1) при $L_y = 1000, 500, 450, 400, 350$. Сплошные линии — результаты расчета для серии пластин, штриховые — для одиночной пластины. Максимальное значение длины $L_{x,\max}$, для которого пластина устойчива при любой ширине L_y , равно 57 и соответствует $L_y = \infty$.

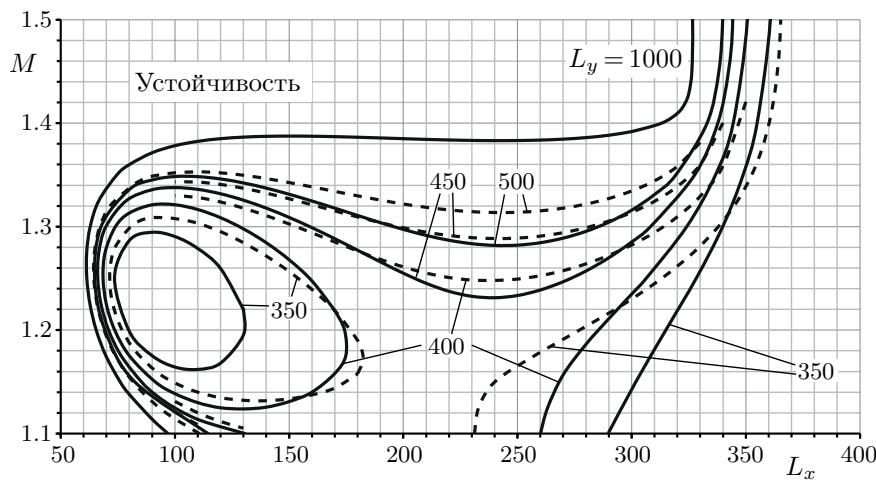


Рис. 17. Границы устойчивости для моды (1, 1) (частота ω_1^1) в плоскости (L_x, M) для различных L_y при $1.1 < M < 1.5$. Сплошные линии относятся к случаю серии пластин, штриховые — к случаю одиночной пластины

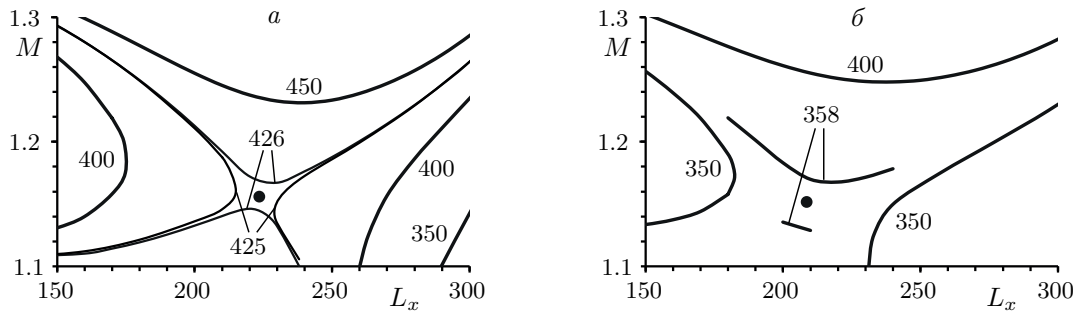


Рис. 18. Границы устойчивости для моды $(1, 1)$ в плоскости (L_x, M) вблизи разделения границы: a — серия пластин; b — одиночная пластина. Седловая точка показана кружком

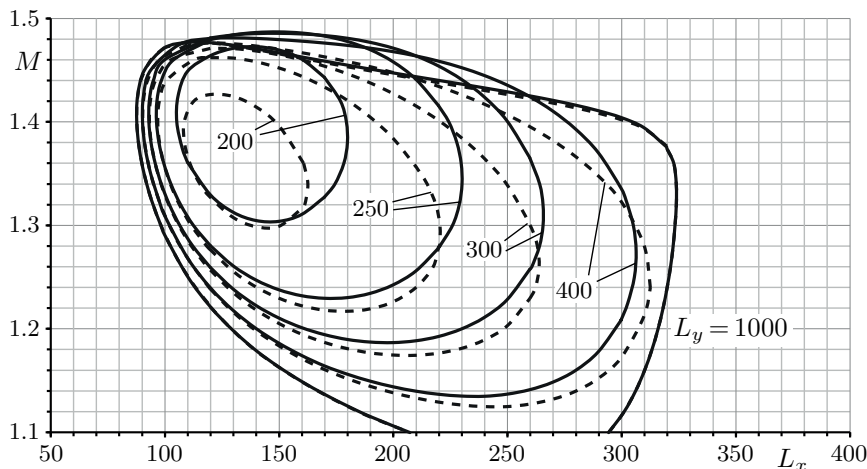


Рис. 19. Границы устойчивости для моды $(1, 2)$ (частота ω_2^1) в плоскости (L_x, M) при различных L_y . Сплошные линии относятся к случаю серии пластин, штриховые — к случаю одиночной пластины

При $L_x > L_{x,\max}$ и достаточно больших значениях L_y найдется интервал $M^*(L_x, L_y) < M < M^{**}(L_x, L_y)$, в котором пластина неустойчива по первой моде. Отметим, что границы устойчивости при $L_y = 1000$ для обоих случаев практически совпадают и друг с другом, и с границей, рассчитанной в двумерной постановке, т.е. при $L_y = \infty$ (см. рис. 8). С уменьшением ширины пролета L_y диапазон чисел Маха, в которых пластина неустойчива, уменьшается, и при $L_y = L_{y,s}$ область неустойчивости разделяется на две изолированные подобласти: одна, лежащая в области меньших значений L_x , соответствует одномодовому флаттеру, другая соответствует флаттеру связанного типа. На рис. 18 более детально показано это разделение: ясно видна седловая точка области неустойчивости при $L_{y,s} \approx 425$ для серии и при $L_{y,s} \approx 356$ для одиночной пластины. При дальнейшем уменьшении L_y область одномодового флаттера уменьшается в размерах и стягивается к определенной точке. При некоторой ширине L_y она полностью сжимается в указанную точку и исчезает. Граница связанного флаттера при уменьшении L_y меняется гораздо медленнее, смещаясь в сторону более высоких L_x .

Перейдем к анализу границ устойчивости по отношению к более высоким модам. На рис. 19 показана область флаттера по второй моде (частота ω_2^1) при $L_y = 1000, 400, 300, 250, 200$. Эти области справа ограничены значениями L_x , при которых возникает флаттер связанного типа, так как в нем “завязываются” первая и вторая моды, причем первая мода становится растущей, а вторая — затухающей. Как и для первой моды, уменьшение L_y приводит к сжатию области одномодового флаттера; при определенном L_y она стягивается в точку и исчезает.

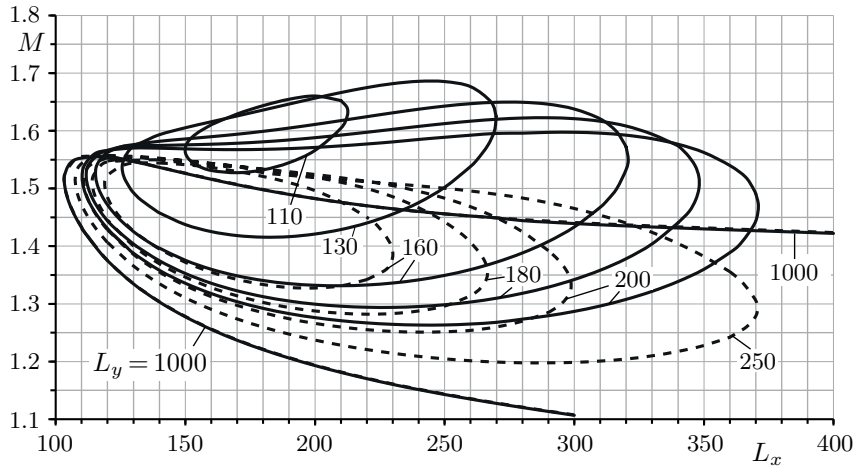


Рис. 20. Границы устойчивости для моды (1,3) (частота ω_3^1) в плоскости (L_x, M) при различных L_y . Сплошные линии относятся к случаю серии пластин, штриховые — к случаю одиночной пластины

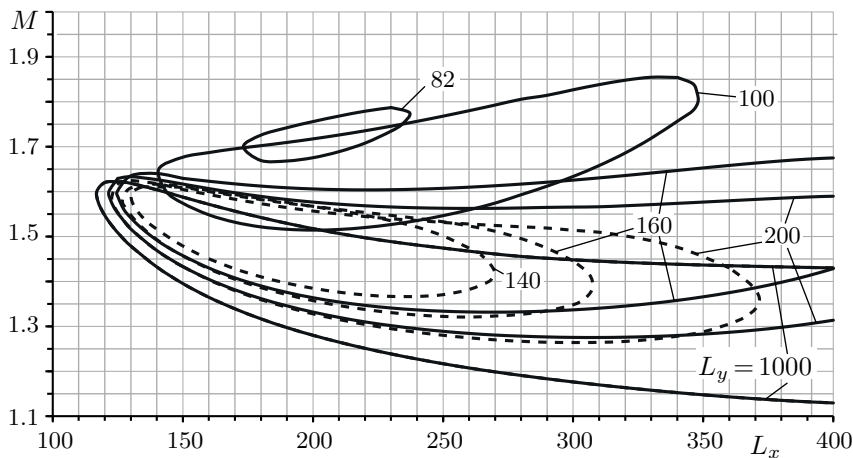


Рис. 21. Границы устойчивости для моды (1,4) (частота ω_4^1) в плоскости (L_x, M) при различных L_y . Сплошные линии относятся к случаю серии пластин, штриховые — к случаю одиночной пластины

Границы области флаттера по модам 3 и 4, не участвующим в образовании флаттера связанного типа, показаны на рис. 20 и 21 соответственно. В отличие от первых двух мод они при $L_y = \infty$ имеют асимптоты $M^* = 1$, $M^{**} = \sqrt{2}$ при $L_x \rightarrow \infty$ (п. 5.1). Границы при $L_y = 1000$ практически совпадают с результатами расчета двумерной задачи. При уменьшении L_y области флаттера для серии пластин сдвигаются в области более высоких M и становятся ограниченными по оси L_x . Далее, как и в случае одномодового флаттера по первым двум модам, происходит стягивание границ неустойчивости в точку и их исчезновение.

Случай одиночной пластины качественно отличается тем, что области флаттера при уменьшении L_y “вложены” друг в друга, так что числа Маха, соответствующие неустойчивости, не увеличиваются (см. рис. 20, 21).

Сдвиг областей одномодового флаттера серии пластин в сторону более высоких чисел Маха с уменьшением L_y объясняется с помощью асимптотической теории одномодового флаттера. На рис. 22 проведено сравнение границ, найденных численно (жирные линии) и по асимптотическим формулам (6.8) (тонкие линии). На рис. 22, а показаны границы флаттера по моде 3 для $L_y = 1000, 200, 130, 110$ (сплошные, штриховые, штрихпунктирные, пунктирные

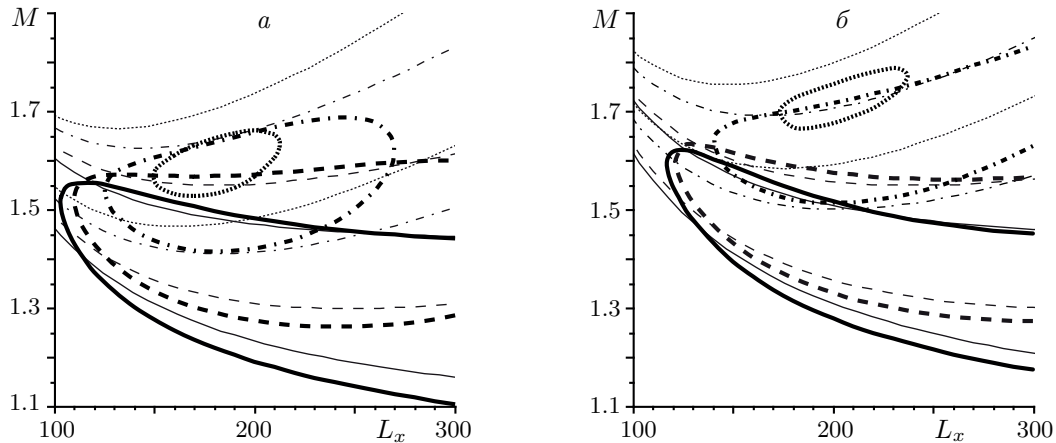


Рис. 22. Сравнение границ флаттера, найденных численно (жирные линии) и по асимптотическим формулам (6.8) (тонкие линии) для мод 3 (а) и 4 (б)

линии соответственно). На рис. 22, б такими же линиями показаны границы флаттера по моде 4 для $L_y = 1000, 200, 100, 82$. Как видно, увеличение чисел Маха, для которых наблюдается неустойчивость, в “центральной” части области флаттера $100 \leq L_x \leq 300$ правильно описывается асимптотиками. Отличие имеется лишь в области малых L_x , где не выполняется условие больших размеров в направлении оси x , и в области больших M , которая достигается лишь при достаточно малых L_y , когда нарушается условие больших размеров пластины в направлении оси y . С асимптотической точки зрения рост M , соответствующих неустойчивости, вызван тем, что при уменьшении L_y увеличивается угол α_j между волнами, из которых состоит собственная мода, и потоком, что и приводит к увеличению чисел Маха (6.8).

Для одиночных пластин отсутствие такого же сдвига не объясняется асимптотической теорией, которая быстро теряет точность при уменьшении L_y . В случае серии пластин возмущение потока собственными колебаниями в поперечном к потоку направлении можно представить как наложение двух волн, бегущих в противоположные стороны по периодически подкрепленной полосе, и поэтому оно правильно определяется асимптотической теорией. Влияние трехмерности течения выражено лишь недеформируемостью плоскости, в которую вмонтирована пластина, перед этой пластиной. В случае же одиночной пластины недеформируемость вокруг боковых сторон пластины также существенна, но не учитывается асимптотической теорией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено сравнение результатов расчета границ одномодового и связанного флаттера упругой пластины в сверхзвуковом потоке, полученных асимптотическим методом глобальной неустойчивости и при помощи численного решения полной интегро-дифференциальной задачи на собственные значения. Показано, что для двумерной задачи (пластина в форме полосы) границы одномодового флаттера количественно правильно определяются асимптотическим методом при длине пластины L_x , имеющей порядок 100 и более, что соответствует используемым в технике конструкциям. Асимптотическая граница связанного флаттера дает достаточное условие для того, чтобы он отсутствовал на пластинах любой протяженности.

В случае серии прямоугольных связанных друг с другом пластин точность асимптотической теории падает с уменьшением ширины пластин L_y , однако теория правильно предсказывает увеличение чисел Маха, соответствующих одномодовому флаттеру.

В случае одиночной пластины появляется качественное расхождение асимптотической теории и численных расчетов, поскольку доминирующей становится трехмерность возмущенного течения газа над пластиной, не учитываемая асимптотической теорией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзин Л.Б., Максимов В.П. Об устойчивости течения слабо сжимаемого газа в трубе с модельной шероховатостью // ПММ. 1978. Т. 42, №4. С. 650–655.
2. Болотин В.В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок // Инж. сб. 1961. Т. 31. С. 3–14.
3. Doaré O., de Langre E. Local and global instability of fluid-conveying pipes on elastic foundations // J. Fluids Struct. 2002. V. 16, N 1. P. 1–14.
4. Doaré O., de Langre E. The role of boundary conditions in the instability of one-dimensional systems // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2006. V. 25, N 6. P. 948–959.
5. Echebarria B., Hakim V., Henry H. Nonequilibrium ribbon model of twisted scroll waves // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96, N 9. Pap. 098301.
6. Каменярж Я.А. О некоторых свойствах уравнений модели связанной термопластичности // ПММ. 1972. Т. 36, №6. С. 1100–1107.
7. Куликовский А.Г. Об устойчивости однородных состояний // ПММ. 1966. Т. 30, №1. С. 148–153.
8. Куликовский А.Г. Об устойчивости течения Пуазейля и некоторых других плоскопараллельных течений в плоской трубе большой, но конечной длины при больших числах Рейнольдса // ПММ. 1966. Т. 30, №5. С. 822–835.
9. Куликовский А.Г. Устойчивость течений слабо сжимаемой жидкости в плоской трубе большой, но конечной длины // ПММ. 1968. Т. 32, №1. С. 112–114.
10. Куликовский А.Г. О глобальной неустойчивости однородных течений в неоднородных областях // ПММ. 2006. Т. 70, №2. С. 257–263.
11. Куликовский А.Г., Шикина И.С. Об изгибных колебаниях длинной трубы, заполненной движущейся жидкостью // Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41, №1. С. 31–39.
12. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. (Теоретическая физика; Т. 10).
13. Miles J.W. The potential theory of unsteady supersonic flow. Cambridge: Univ. Press, 1959. Рус. пер.: Майлс Дж.У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М.: Физматгиз, 1963.
14. Nichols J.W., Chomaz J.-M., Schmid P.J. Twisted absolute instability in lifted flames // Phys. Fluids. 2009. V. 21, N 1. Pap. 015110.
15. Peake N. On the unsteady motion of a long fluid-loaded elastic plate with mean flow // J. Fluid Mech. 2004. V. 507. P. 335–366.
16. Priede J., Gerbeth G. Convective, absolute, and global instabilities of thermocapillary–buoyancy convection in extended layers // Phys. Rev. E. 1997. V. 56, N 4. P. 4187–4199.
17. Priede J., Gerbeth G. Absolute versus convective helical magnetorotational instability in a Taylor–Couette flow // Phys. Rev. E. 2009. V. 79, N 4. Pap. 046310.
18. Shishaeva A., Vedenev V., Aksenov A. Nonlinear single-mode and multi-mode panel flutter oscillations at low supersonic speeds // J. Fluids Struct. 2015. V. 56. P. 205–223.
19. Shugai G.A., Yakubenko P.A. Convective and absolute instability of a liquid jet in a longitudinal magnetic field // Phys. Fluids. 1997. V. 9, N 7. P. 1928–1932.
20. Tuerke F., Sciamarella D., Pastur L.R., Lusseyran F., Artana G. Frequency-selection mechanism in incompressible open-cavity flows via reflected instability waves // Phys. Rev. E. 2015. V. 91, N 1. Pap. 013005.
21. Веденев В.В. Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. №5. С. 155–169.
22. Веденев В.В. О высокочастотном флаттере пластины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. №2. С. 163–172.
23. Веденев В.В. Высокочастотный флаттер прямоугольной пластины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. №4. С. 173–181.
24. Веденев В.В. Нелинейный высокочастотный флаттер пластины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. №5. С. 197–208.
25. Веденев В.В. Численное исследование сверхзвукового флаттера пластины с использованием точной аэродинамической теории // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. №2. С. 169–178.
26. Веденев В.В. Исследование одномодового флаттера прямоугольной пластины в случае переменного усиления собственной моды вдоль пластины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2010. №4. С. 163–174.

27. *Vedeneev V.V.* Panel flutter at low supersonic speeds // *J. Fluids Struct.* 2012. V. 29. P. 79–96.
28. *Веденеев В.В.* Предельные циклы колебаний при одномодовом флаттере пластины // *ПММ.* 2013. Т. 77, №3. С. 355–370.
29. *Vedeneev V.V., Gwernyuk S.V., Zubkov A.F., Kolotnikov M.E.* Experimental observation of single mode panel flutter in supersonic gas flow // *J. Fluids Struct.* 2010. V. 26, N 5. P. 764–779.
30. *Веденеев В.В., Гувернюк С.В., Зубков А.Ф., Колотников М.Е.* Экспериментальное исследование одномодового панельного флаттера в сверхзвуковом потоке газа // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2010. №2. С. 161–175.
31. *Веденеев В.В., Шитов С.В.* Флаттер периодически подкрепленной упругой полосы в потоке газа с малой сверхзвуковой скоростью // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2015. №3. С. 105–126.
32. *Yakubenko P.A.* Global capillary instability of an inclined jet // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 346. P. 181–200.