

УДК 532.591:534.1

© 2016 г. В. В. Веденеев

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛОЕ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА, ПОДСТИЛАЮЩЕМ СЛОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

В связи с задачей снижения турбулентного трения в пограничном слое за счет использования податливых покрытий рассматривается движение волн в слое вязкоупругого материала конечной толщины, поверх которого движется слой идеальной несжимаемой жидкости. Получено дисперсионное уравнение и проанализировано поведение его корней. Доказано, что при превышении определенной скорости потока возникают два вида неустойчивости: более слабая неустойчивость, вызванная вязкими свойствами материала и исчезающая в чисто упругом случае, и более сильная неустойчивость, сохраняющаяся в случае упругого материала. В аналитическом виде найдены критерии устойчивости коротких и длинных волн, численно показано, что для обоих видов неустойчивости наименьшая критическая скорость среди всех длин волн достигается на коротких волнах, критерии устойчивости которых, таким образом, дает критерий устойчивости всех волн. Проанализированы резонансные длины волн, при которых граница раздела совершает строго вертикальные колебания. Резонансная длина волны, равная 3–5 толщинам, практически не испытывает влияние жидкости, вместе с тем при появлении жидкости появляется второй резонанс с длиной волны 5–20 толщин. На основании полученных результатов проведена оценка влияния движущейся жидкости на эффективность податливых покрытий, используемых для снижения турбулентного трения.

1. Введение. В ряде практически важных задач значительную часть сопротивления движению твердых тел в жидкости составляет трение в турбулентном пограничном слое; например, для современных грузовых судов оно доходит до 70% общего сопротивления. Среди методов снижения турбулентного трения: активное управление вибрацией поверхности, создание регулярных структур на обтекаемой поверхности (риблеты), использование пористых поверхностей с вдувом/отсосом из пограничного слоя, использование полимерных присадок, гидрофобные поверхности, организация вентилируемой кавитации для отрыва жидкости от обтекаемого тела, можно выделить использование деформируемых покрытий.

Влияние податливости поверхности, на которой образуется пограничный слой, было впервые экспериментально обнаружено Крамером [1]. К настоящему времени опубликовано много работ по устойчивости ламинарных пограничных слоев на упругих и вязкоупругих поверхностях [2–9]. Было показано, что упругие и вязкие свойства поверхности существенно влияют на форму нейтральной кривой; кроме того, помимо невязкой неустойчивости и неустойчивости Толлмина–Шлихтинга возникает ряд новых видов неустойчивости, связанных с деформируемостью поверхности [2–4]. Определенное сочетание свойств поверхности позволяет повысить критическое число Рейнольдса более чем в два раза, что сопровождается увеличением длины ламинарного участка пограничного слоя [9].

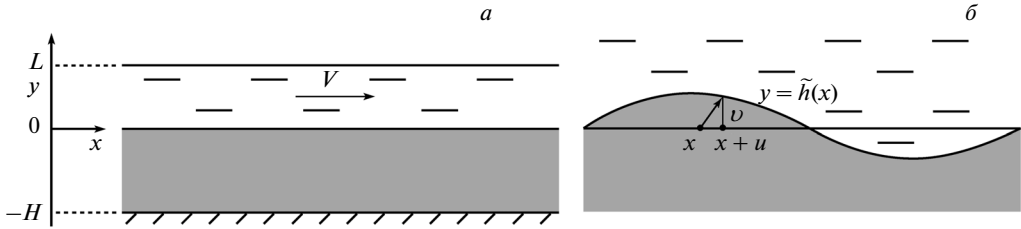
Гораздо меньше исследовано воздействие податливых покрытий на турбулентные пограничные слои. Существуют подходы двух типов: основанные на прямом численном моделировании турбулентного пограничного слоя на деформируемых поверхностях [10–12] и основанные на использовании упрощенных моделей и выработке качественных критериев, выполнение которых должно приводить к снижению турбулентного трения [13–15]. Несмотря на то, что подходы первого типа дают лучшее понимание физических механизмов снижения трения, трудности прямого численного моделирования турбулентности пока не позволяют получить достоверные и практически удобные критерии эффективности покрытий. С другой стороны, предложенные критерии [13, 15] подтверждены экспериментальными данными и удобны для практического использования. Кроме того, они оперируют только такими собственными параметрами покрытий, как жесткость покрытия, фазовая скорость, частота и длина волн в покрытии, которые, в свою очередь, выражаются через свойства материала, что делает удобным использование этих критериев на практике. Как правило, для конкретных материалов эти параметры определяются экспериментально при исследовании распространения волн в слое материала, находящемся в воздухе [15]. Однако при работе покрытия в воде скорости распространения волн изменяются за счет инерции жидкости, что до сих пор не учитывалось в существующих критериях [13, 15].

Подчеркнем, что несмотря на то, что покрытия предназначены для взаимодействия с турбулентным пограничным слоем, в предложенных критериях [13, 15] фигурируют именно собственные скорости волн, измеренные или вычисленные без учета пограничного слоя: считается, что последний практически не влияет на скорости распространения поверхностных волн. Поэтому в постановке задачи, решаемой в настоящей работе, пограничный слой также не учитывается.

Задача о распространении волн в податливых покрытиях, обтекаемых однородным потоком жидкости, решалась в ряде работ, но само покрытие моделировалось как пластина на упругом основании [3, 6, 16, 17]. Такая модель не учитывает сдвиговых деформаций в упругом материале и неверно отражает дисперсионные свойства монолитных покрытий, а также не описывает резонансные явления в упругом слое, которые, как было показано [15], играют принципиальную роль. Ряд работ, где покрытие моделировалось в рамках теории упругости [4, 9, 18, 19], учитывают пограничный слой, что приводит к необходимости использования численных методов и не позволяет аналитически исследовать свойства волн. В работе [18] как частный случай рассмотрено отсутствие пограничного слоя, однако толщина слоя жидкости считалась бесконечной, а исследование также проведено численно лишь для конкретных значений параметров. В монографиях [20, 21] приводятся результаты для волн в упругом слое, контактирующем со слоем жидкости, но не учитывается ее движение.

2. Постановка задачи. Исследуется поведение линейных волн в слое линейно-упругого материала толщиной H (случай вязкоупругости сводится к упругому введению комплексных упругих модулей и будет рассмотрен ниже), с одной стороны прикрепленного к абсолютно жесткой плоскости, поверх которого находится слой невязкой несжимаемой жидкости толщиной L (фиг. 1,а). Жидкость в общем случае движется с постоянной скоростью V параллельно границе раздела. Сила тяжести направлена противоположно оси y .

Введем систему координат с осью x вдоль направления движения жидкости, как показано на фиг. 1,а. Будем исследовать двумерные движения в плоскости x, y . Рассмотрим сначала равновесное состояние системы. Решая уравнения линейной теории упругости и гидродинамики, нетрудно показать, что оно выглядит следующим образом: слой упругого материала находится в сжатом состоянии под действием собственного веса и веса слоя жидкости, причем и в жидкости, и в упругом слое устанавливаются гидростатические распределения давления:



Фиг. 1

$$\begin{aligned}
 p^0 &= p_a + \rho_f g L - \rho_f g y, \quad 0 < y < L \\
 \sigma_{22}^0 &= -(p_a + \rho_f g L - \rho_f g y), \quad \sigma_{12}^0 = 0, \quad -H < y < 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

где ρ и ρ_f – плотности материала и жидкости. Будем полагать, что смещение границы раздела упругий слой–жидкость под действием веса жидкости и самого слоя – малая величина, так что им можно пренебречь.

Рассмотрим возмущения равновесного состояния. Пусть $\{u, v\}$ – вектор перемещений упругой среды, Φ – потенциал движения жидкости. Введем функции ϕ и ψ ([22], гл. IX, §10), так что

$$u = \phi_x + \psi_y, \quad v = \phi_y - \psi_x
 \tag{2.2}$$

Тогда уравнения движения для возмущений упругой среды принимают вид ([22], гл. IX, §10)

$$\Delta\phi - \frac{1}{a_1^2}\phi_{tt} = 0, \quad \Delta\psi - \frac{1}{a_2^2}\psi_{tt} = 0
 \tag{2.3}$$

Здесь a_1 и a_2 – скорость продольных и поперечных волн в упругой среде, выражаемые через коэффициенты Ламе λ и μ :

$$a_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \Rightarrow \lambda = \rho(a_1^2 - 2a_2^2), \quad \mu = \rho a_2^2$$

Далее понадобятся выражения для компонент σ_{22} и σ_{12} тензора напряжений. Выражая компоненты тензора деформаций через вектор перемещений (2.2) и используя закон Гука, получаем

$$\sigma_{22} = \lambda(\phi_{xx} + \phi_{yy}) + 2\mu(\phi_{yy} - \psi_{xy}), \quad \sigma_{12} = \mu(2\phi_{xy} + \psi_{yy} - \psi_{xx})
 \tag{2.4}$$

Далее вместо коэффициентов Ламе λ и μ будем использовать скорость продольных и поперечных волн в упругой среде a_1 и a_2 как определяющие свойства материала.

Уравнение для потенциала невязкой несжимаемой жидкости – уравнение Лапласа

$$\Delta\Phi = 0
 \tag{2.5}$$

Возмущение давления выражается через возмущение потенциала с помощью интеграла Коши–Лагранжа, который в линеаризованной форме имеет вид

$$p = -\rho_f(\Phi_t + V\Phi_x + gy)
 \tag{2.6}$$

где y – вертикальное перемещение частицы жидкости.

Перейдем к формулировке граничных условий, рассматривая только малые отклонения границы раздела упругий слой–жидкость и свободной поверхности жидкости от невозмущенного состояния. Это позволяет ставить соответствующие граничные условия на невозмущенных поверхностях.

На нижней границе упругого слоя должны быть нулевые перемещения:

$$y = -H: u = v = 0 \quad (2.7)$$

На границе раздела упругий слой–жидкость должны быть выполнены три граничных условия. Во-первых, равенство нормальной и касательной компонент тензора напряжений дает два условия:

$$y = 0: \sigma_{22} = -p, \quad \sigma_{12} = 0 \quad (2.8)$$

Во-вторых, на этой поверхности должно быть выполнено условие непротекания через деформирующуюся поверхность. Заметим, что высота точек границы, которая входит в выражение для давления (2.6) и в условие непротекания, дается в линейном приближении функцией $v(x, 0)$. Действительно, в общем случае

$$\tilde{h}(x + u(x, 0)) = v(x, 0)$$

где $y = \tilde{h}(x)$ – уравнение поверхности раздела (фиг. 1,б). После линеаризации получаем

$$\tilde{h}(x) = v(x, 0)$$

и условие непротекания принимает вид

$$y = 0: \Phi_y = Vv_x + v_t \quad (2.9)$$

Граничное условие на свободной поверхности жидкости – равенство давления атмосферному, а значит, равенство возмущения давления нулю:

$$y = L: p = -\rho_f(\Phi_t + V\Phi_x + gh) = 0 \quad (2.10)$$

Так как в выражение (2.10) входит высота уровня свободной поверхности, то она должна рассматриваться как дополнительная неизвестная функция $h(x, t)$. Для нее должно быть поставлено кинематическое условие непротекания:

$$y = L: \Phi_y = Vh_x + h_t \quad (2.11)$$

3. Дисперсионное уравнение. Будем рассматривать волновые движения системы:

$$(\phi, \psi, \Phi, h) = (f_1(y), f_2(y), s(y), c_0) e^{i(kx - \omega t)}$$

Тогда уравнения движения упругой среды (2.3) записываются в виде

$$f_j'' - (k^2 - k_j^2)f_j = 0, \quad k_j = \omega/a_j \quad (3.1)$$

Здесь и далее $j = 1, 2$, штрихом обозначена производная по y . Уравнение движения жидкости (2.5) принимает вид

$$s'' - k^2 s = 0 \quad (3.2)$$

Запишем граничные условия. На нижней границе упругого слоя условие нулевых перемещений (2.7) при учете равенств (2.2) сводится к следующему:

$$y = -H: f_1' - ikf_2 = 0, \quad f_2' + ikf_1 = 0 \quad (3.3)$$

На границе раздела упругий слой–жидкость равенство (2.8) нормальной и касательной компонент тензора напряжений после линеаризации принимает вид

$$y = 0: \sigma_{22} = -p = \rho_f(\Phi_t + V\Phi_x + g\nu), \quad \sigma_{12} = 0$$

Возмущение компоненты σ_{22} складывается из двух частей. Во-первых, она меняется из-за движения среды – эта часть дается выражением (2.4). Во-вторых, из-за изменения высоты поверхности раздела невозмущенное значение σ_{22} отличается на $\rho g\nu$ (2.1). Пользуясь выражением (2.2) для ν , получаем

$$y = 0: (a_1^2 - 2a_2^2)(f_1'' - k^2 f_1) + 2a_2^2(f_1''' - ikf_2') + g(f_1' - ikf_2) = \\ = im(kV - \omega)s + mg(f_1' - ikf_2), \quad f_2'' + 2ikf_1' + k^2 f_2 = 0; \quad m = \rho_f/\rho \quad (3.4)$$

Условие непротекания через деформирующуюся поверхность (2.9) записывается в виде

$$y = 0: s' = i(kV - \omega)(f_1' - ikf_2) \quad (3.5)$$

Наконец, на свободной поверхности жидкости условия (2.10) и (2.11) переписываются так:

$$y = L: i(kV - \omega)s + gc_0 = 0, \quad s' = i(kV - \omega)c_0 \quad (3.6)$$

Таким образом, система уравнений (3.1), (3.2) и граничных условий (3.3)–(3.6) представляет собой замкнутую систему.

Общее решение каждого из уравнений (3.1), (3.2) представляется в виде линейной комбинации экспонент:

$$f_j = c_{j1}e^{\lambda_j y} + c_{j2}e^{-\lambda_j y}, \quad \lambda_j = \sqrt{k^2 - k_j^2} \quad (3.7) \\ s = c_{31}e^{\lambda_3 y} + c_{32}e^{-\lambda_3 y}, \quad \lambda_3 = k$$

Подстановка в граничные условия (3.3)–(3.6) приводит к линейной однородной системе семи уравнений относительно постоянных $c_0, c_{j1}, c_{j2}, c_{31}, c_{32}$. Приравнявая ее определитель к нулю, получаем дисперсионное уравнение, связывающее волновое число k и фазовую скорость $c = \omega/k$.

Для удобства дальнейшего исследования сначала перейдем к безразмерным переменным, выбрав a_2, H, ρ в качестве размерно-независимых величин, характеризующих упругий слой. Остальные величины приведем к безразмерному виду следующим образом:

$$c' = \frac{c}{a_2}, \quad k' = kH, \quad a' = \frac{a_2}{a_1}, \quad V' = \frac{V}{a_2}, \quad m = \frac{\rho_f}{\rho}, \quad L' = \frac{L}{H}, \quad g' = \frac{gH}{a_2^2} \quad (3.8)$$

где штрихами обозначены безразмерные переменные. При этом из параметров упругого слоя остается только коэффициент Пуассона ν , так как отношение

$$a' = \frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}}$$

не зависит от модуля Юнга, при этом $0 < a' < \sqrt{3}/2$. Тогда дисперсионное уравнение запишется в следующем безразмерном виде (штрихи далее, до разд. 10, опускаются):

$$\begin{aligned} & \langle [(2 - c^2)^2 (\operatorname{ch} k \alpha \operatorname{ch} k \beta - (\alpha \beta)^{-1} \operatorname{sh} k \alpha \operatorname{sh} k \beta) + \\ & + 4(\operatorname{ch} k \alpha \operatorname{ch} k \beta - \alpha \beta \operatorname{sh} k \alpha \operatorname{sh} k \beta) - 4(2 - c^2)] - \\ & - (m - 1) g k^{-1} \beta^{-1} c^2 \{ \operatorname{ch} k \alpha \operatorname{sh} k \beta - \alpha \beta \operatorname{sh} k \alpha \operatorname{ch} k \beta \} (1 - g k^{-1} (V - c)^{-2} \operatorname{th} k L) = \\ & = m c^2 (V - c)^2 \beta^{-1} (\operatorname{th} k L - g k^{-1} (V - c)^{-2}) [\operatorname{ch} k \alpha \operatorname{sh} k \beta - \alpha \beta \operatorname{sh} k \alpha \operatorname{ch} k \beta] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь

$$\alpha(c) = \sqrt{1 - a^2 c^2}, \quad \beta(c) = \sqrt{1 - c^2}$$

Задача определяется пятью безразмерными параметрами: a, V, m, L, g .

4. Структура дисперсионного уравнения. Поскольку дисперсионное уравнение (3.9) громоздко, рассмотрим его структуру и оценим физический смысл каждого сомножителя. Схематически его можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \langle [\text{волны на поверхности материала}] - (m - 1) g k^{-1} \beta^{-1} c^2 \{ \text{влияние силы тяжести} \} \rangle \times \\ & \times (\text{волны на поверхности жидкости}) = \\ & = m c^2 (V - c)^2 \beta^{-1} (\text{связанность} - \text{жидкость}) [\text{связанность} - \text{материал}] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Предположим сначала, что правая часть этого уравнения равна нулю и рассмотрим левую часть, состоящую из двух сомножителей – в угловых и в круглых скобках. Корни дисперсионного уравнения даются корнями каждого сомножителя. Корни второго сомножителя имеют вид

$$c = V \pm \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th} k L} \quad (4.2)$$

Это дисперсионное соотношение для гравитационных волн на поверхности жидкости глубиной L с неподвижным плоским дном ([23], гл. VIII, §11).

Если положить $g = 0$, то корни первого сомножителя даются приравнением к нулю выражения в квадратных скобках. Это дисперсионное уравнение для волн на поверхности слоя упругого материала конечной толщины в пустоте [15]. При $k \rightarrow \infty$ (бесконечная толщина слоя), оно превращается в уравнение для волн Релея на поверхности упругого полупространства ([22], гл. IX, §10)

$$(2 - c^2)^2 - 4\alpha\beta = 0 \quad (4.3)$$

Очевидно, что слагаемое в соотношениях (3.9) и (4.1), содержащее множитель в фигурных скобках, влияет на поверхностные волны в упругом слое только при $g \neq 0$, выражая, таким образом, влияние силы тяжести. Физически сила тяжести играет ту же роль, что и в волнах на поверхности жидкости: при изменении уровня поверхности упругого слоя изменяется гравитационный потенциал, который, наряду с силами упругости, приводит к образованию волн. Это слагаемое обращается в нуль также при $m = 1$ – тогда плотность материала и жидкости совпадают, и изменение положения границы раздела приводит к одинаковому изменению потенциалов в материале и

жидкости. При $m \neq 1$ потенциалы изменяются неодинаково, приводя к возникновению поверхностной силы, которая и выражена этим слагаемым.

Обратимся теперь к правой части дисперсионного уравнения. Она равна нулю в следующих случаях.

Случай $L = 0$, т.е. отсутствие жидкости. Нетрудно убедиться, что правая часть сокращается со слагаемым из левой части, пропорциональным m .

Случай $m = 0$, т.е. обращается в нуль плотность жидкости. Как установлено выше, имеются две группы корней. Первые, описывающие волны на поверхности материала, не испытывают влияния жидкости из-за ее безынерционности. Вторые, описывающие волны на поверхности жидкости, не испытывают влияния слоя, так как его инерция становится бесконечно большой по сравнению с инерцией жидкости, и последняя ведет себя так, как будто слой недеформируемый.

Случай $c = 0$ – стоячая волна в системе координат, связанной с упругим материалом. Собственная функция вырождается в нулевую, так что и упругий слой, и поток жидкости находится в невозмущенном состоянии. Поэтому исчезает их взаимодействие.

Если пренебречь силой тяжести ($g = 0$), то правая часть обращается в нуль еще в случае $c = V$, т.е. когда волна является стоячей относительно жидкости. Из-за отсутствия силы тяжести такая волна не вызывает в жидкости возмущений, поэтому и возмущение давления на поверхности упругой среды равно нулю.

В остальных случаях правая часть отлична от нуля и, очевидно, выражает связанность волн на поверхности материала и на поверхности жидкости. При этом последний множитель содержит только характеристики упругого слоя, предпоследний – только характеристики слоя жидкости, что отражено в структуре уравнения (4.1).

Отметим, что при $g = 0$ и $L \rightarrow \infty$ дисперсионное уравнение (3.9) совпадает с полученным [18] в случае отсутствия пограничного слоя.

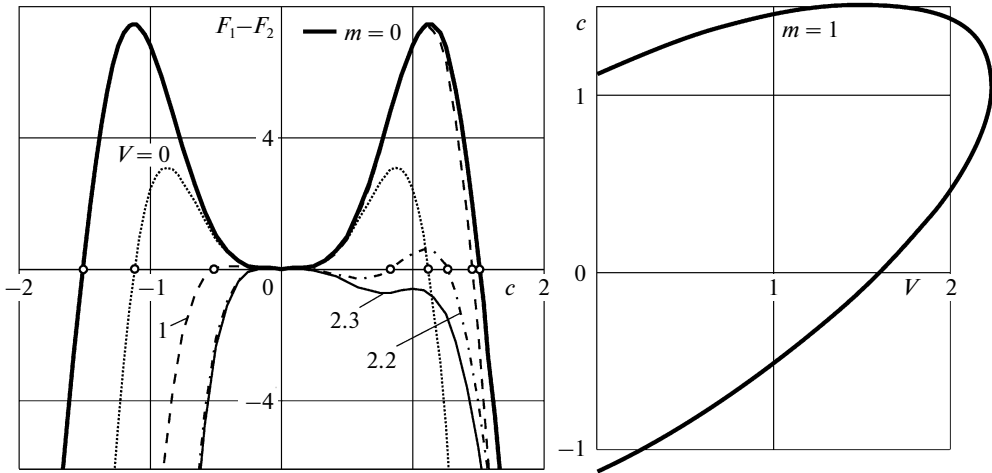
5. Характерное поведение волн. Сначала рассмотрим случай, когда покрытие расположено вертикально, т.е. сила тяжести действует параллельно плоскости покрытия. Тогда плоскость *фиг. 1, a* горизонтальна, и сила тяжести не действует на плоские волны, т.е. $g = 0$. Ниже представлены результаты расчета фазовой скорости c (наименьшие по модулю решения уравнения (3.9)) при следующих значениях параметров:

$$v = 0.45 (\Rightarrow a = 0.302), \quad L = 100, \quad k = 2\pi/3 \quad (5.1)$$

и безразмерных скоростях потока $V = 0, 1, 2.2, 2.3$. Волновое число соответствует длине волны, равной утроенной толщине слоя. В левой части *фиг. 2* показаны графики $F_1(c) - F_2(c)$, где F_1 и F_2 – левая и правая части уравнения (3.9). Жирная сплошная кривая соответствует $m = 0$, остальные кривые соответствуют $m = 1$ и указанным значениям V .

Как видно, наличие покоящейся жидкости существенно (на ~25%) уменьшает фазовые скорости. При ненулевой скорости потока график становится несимметричным: скорость бегущей по потоку волны увеличивается, а бегущей против потока – уменьшается. С увеличением V скорость бегущей против потока волны становится нулевой, после чего волна сносится движущейся жидкостью и становится бегущей по потоку. При дальнейшем увеличении скорости эти две бегущие по потоку волны сливаются в одну, после чего соответствующие два корня $c(V)$ становятся комплексно-сопряженными. Поскольку один из них всегда имеет положительную мнимую часть, возникнет неустойчивость границы раздела упругая среда–жидкость в виде бегущих волн.

В правой части *фиг. 2* показана зависимость наименьших по модулю корней $c(V)$, рассчитанная при значениях параметров (5.1) и $m = 1$ и иллюстрирующая описанное выше поведение. Таким образом, слой упругого материала может терять устойчивость, если находящаяся сверху жидкость движется с достаточно большой скоростью.



Фиг. 2

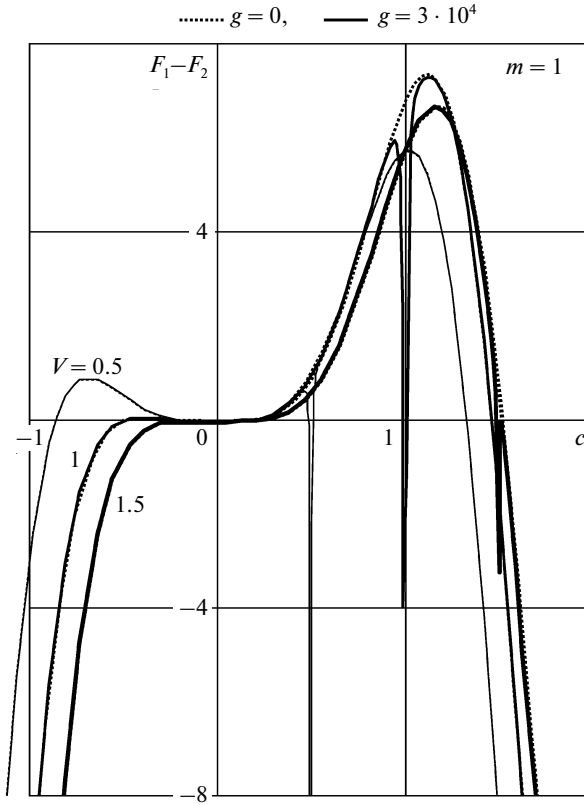
Теперь рассмотрим случай, когда покрытие расположено горизонтально, т.е. сила тяжести действует в плоскости фиг. 1, *a*, а сама эта плоскость вертикальна.

Оценим характерную величину безразмерного параметра g . Для приложений, связанных с податливыми покрытиями (мягкие резины), характерные параметры материала: модуль Юнга $E \sim 10^6$ Па, $\rho \sim 10^3$ кг/м³. Тогда минимальное значение размерной скорости

$$a_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} > \sqrt{\frac{E}{3\rho}} \approx 18 \text{ м/с}$$

Примем, что $H < 0.01$ м, ускорение свободного падения равно 9.8 м/с^2 . Тогда параметр $g < 3 \times 10^{-4}$. В уравнение (3.9) он входит только в комбинации g/k . Будем рассматривать длины волн, не превышающие 100 толщин слоя. Тогда безразмерное волновое число $k > 0.063$. В результате отношение $g/k < 0.005$, и слагаемыми с множителем g можно пренебречь всегда, за исключением малой окрестности точки $c = V$. В этой окрестности расположены два корня, близкие по величине к значениям (4.2) и соответствующие гравитационным волнам на поверхности жидкости. Еще меньше сила тяжести влияет в случае более твердых материалов, включая металлы, из-за гораздо большей скорости a_2 .

Для расчетов возьмем наибольшее характерное значение $g = 3 \times 10^{-4}$, значения остальных параметров, как и ранее, возьмем в соответствии с равенствами (5.1). На фиг. 3 показаны графики разности $F_1(c) - F_2(c)$ при $m = 1$ и безразмерных скоростях $V = 0.5, 1.0, 1.5$, полностью подтверждающие проведенные оценки (пунктирные и сплошные линии соответствуют $g = 0$ и $g = 3 \times 10^{-4}$). Как видно, по сравнению со случаем $g = 0$ графики в окрестности точки $c = V$ имеют направленные вниз узкие “пики”, в результате чего появляются два дополнительных корня, близких к значению $c = V$. В то же время вне окрестности этой точки графики практически неотличимы от аналогичных для $g = 0$.



Фиг. 3

Таким образом, при изучении фазовых скоростей, соответствующих волнам на границе раздела материал–жидкость, а также при исследовании устойчивости, влиянием силы тяжести можно пренебречь.

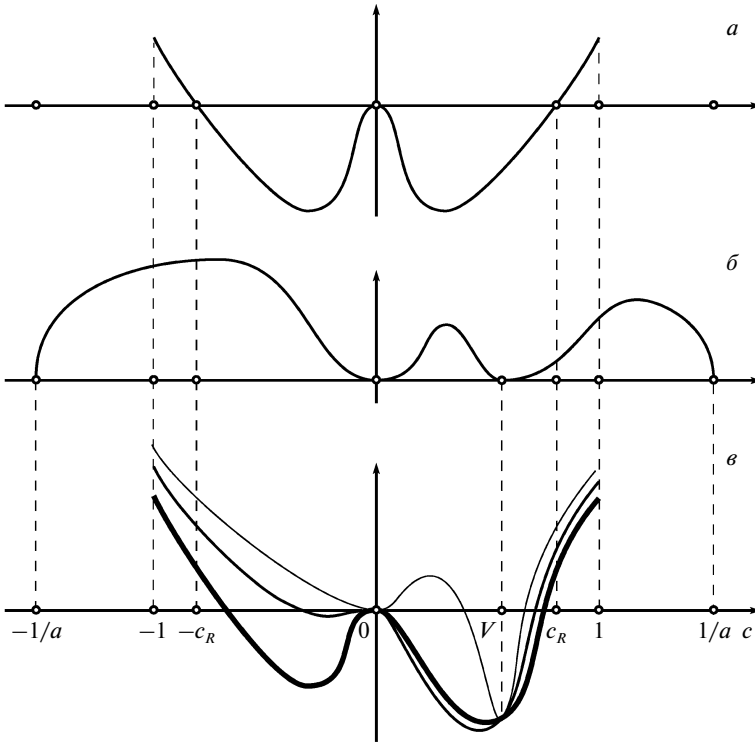
Ниже для исследования границы устойчивости понадобится дисперсионное уравнение в виде, получаемом после деления обеих частей уравнения (3.9) на $chka\alpha chk\beta$:

$$\begin{aligned} & \langle [(2 - c^2)^2 (1 - (\alpha\beta)^{-1} thk\alpha thk\beta) + 4(1 - \alpha\beta thk\alpha thk\beta) - 4(2 - c^2)(chka\alpha chk\beta)^{-1}] - \\ & - (m - 1)gk^{-1}\beta^{-1}c^2 \{ thk\beta - \alpha\beta thk\alpha \} \rangle (1 - gk^{-1}(V - c)^{-2} thkL) = \\ & = mc^2(V - c)^2\beta^{-1}(thkL - gk^{-1}(V - c)^{-2})[thk\beta - \alpha\beta thk\alpha] \end{aligned} \quad (5.2)$$

6. Устойчивость коротких волн. Сначала рассмотрим поведение коротких волн ($k \rightarrow \infty$) в трех диапазонах скоростей:

- 1) $|c| < 1$ (α и β – вещественные и без ограничения общности положительные числа),
- 2) $1 < |c| < 1/a$ (величина α положительна, β чисто мнимая),
- 3) $|c| > 1/a$ (α и β чисто мнимые).

Иследуем первый случай. Перейдем в уравнении (5.2) к пределу при $k \rightarrow \infty$, предполагая, что его корни $c(k)$ при этом стремятся к конечным ненулевым значениям



Фиг. 4

(случай $c \approx 0$ будет рассмотрен ниже), причем предельное значение $|c| < 1$, т.е. функции $\alpha(c)$ и $\beta(c)$ вещественны и (для определенности) положительны. Получим уравнение

$$\langle [(2 - c^2)^2(1 - (\alpha\beta)^{-1}) + 4(1 - \alpha\beta)] \rangle = mc^2(V - c)^2\beta^{-1}[1 - \alpha\beta] \quad (6.1)$$

Три его корня очевидны:

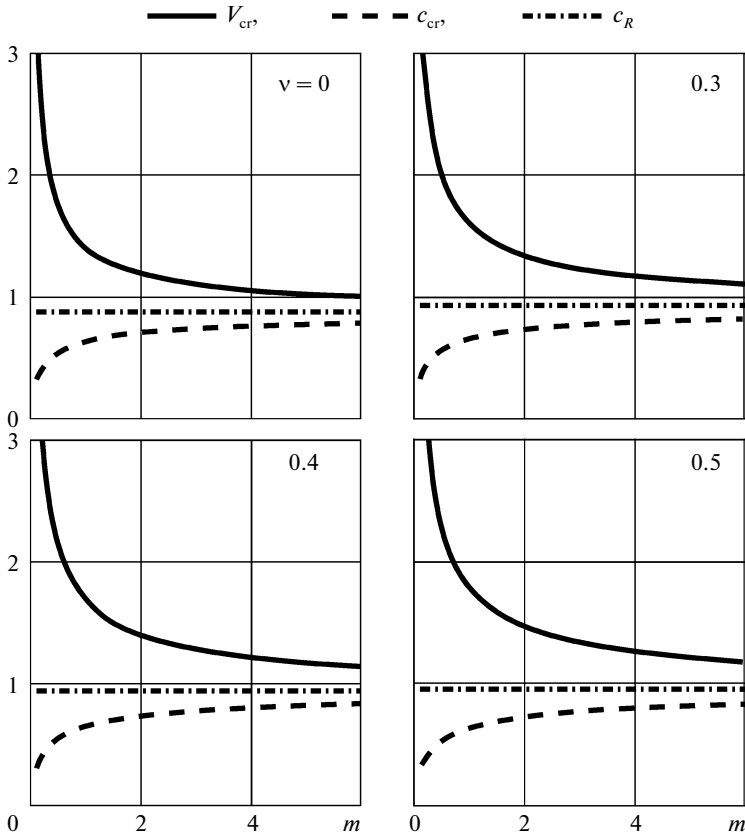
$$\alpha\beta = 1 \Rightarrow c = 0, \pm\sqrt{1 + 1/a^2}$$

Корень $c = 0$ дает тривиальное решение, а два других не удовлетворяют условию $|c| < 1$. Остальные корни уравнения (6.1) совпадают с корнями уравнения

$$((2 - c^2)^2 - 4\alpha\beta) + mc^2(V - c)^2\alpha = 0 \quad (6.2)$$

Первое слагаемое его левой части совпадает с левой частью (4.3) и имеет нули $c = 0, \pm c_R$, где $c_R < 1$ – фазовая скорость волны Релея. Второе слагаемое неотрицательно и имеет нули $c = 0, V, \pm 1/a$. Графики первого и второго слагаемого левой части (6.2) показаны на фиг. 4, а и б. На фиг. 4, в жирной, обычной и тонкой линией показана их сумма в случае $V < c_R$ при малых, средних и больших значениях m .

Зафиксируем скорость потока V и будем увеличивать плотность жидкости m . Тогда в соответствии с графиками на фиг. 4, в отрицательный корень c смещается вправо и становится положительным. Положительный корень уменьшается. Если $V < c_R$, то при



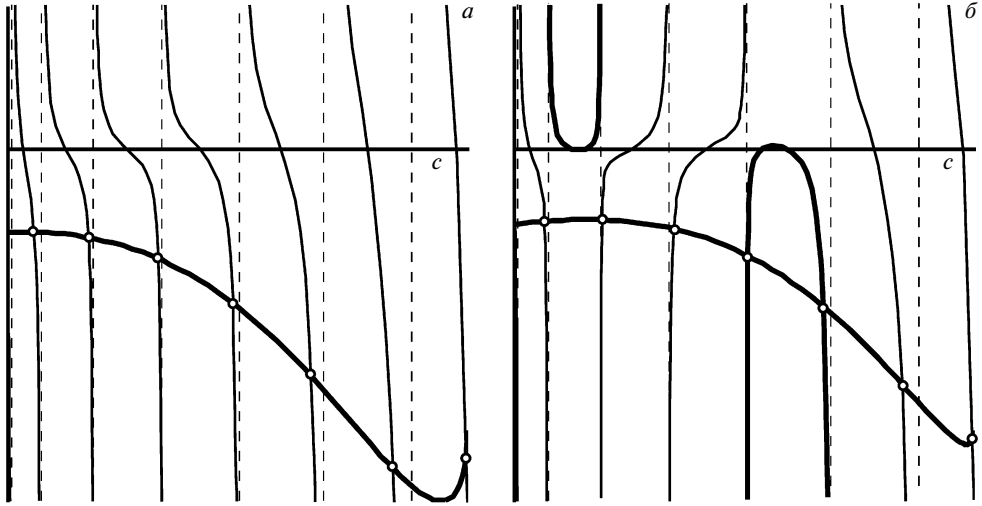
Фиг. 5

сколько угодно больших m будет иметь место ситуация, показанная на фиг. 4, ν тонкой линией. Так как при $c = V$ левая часть уравнения (6.2) отрицательна, а при $c = 1$ и положительных $c \approx 0$ – положительна, то на каждом интервале $0 < c < V$ и $V < c < 1$ будет по одному корню, причем оба они стремятся к V при $m \rightarrow \infty$. Если же $V > c_R$, то при достаточно больших m два корня сблизятся и сольются, после чего вся левая часть уравнения (6.2) станет положительной при $0 < c < 1$. При этом образуется пара комплексно-сопряженных корней, один из которых с положительной мнимой частью приведет к неустойчивости.

Таким образом, доказано следующее:

- 1) при $V < c_R$ слияние корней и переход к неустойчивости с короткими волнами и $|c| < 1$ невозможен ни при каких m ,
- 2) при $V > c_R$ существует такая плотность жидкости $m = m_{cr}(V)$, что короткие волны с $|c| < 1$ устойчивы при $m \leq m_{cr}$ и неустойчивы в противном случае, причем $m_{cr}(V) \rightarrow \infty$ при $V \rightarrow c_R + 0$ и фазовая скорость c_{cr} в момент слияния всегда удовлетворяет условию $0 < c_{cr} < c_R$.

График зависимости $V_{cr}(m)$ (функция, обратная $m_{cr}(V)$) построен численно на фиг. 5 для ряда характерных значений коэффициента Пуассона ν (которыми определяется безразмерный параметр a). Там же показана зависимость $c_{cr}(m)$ – значение фазовой



Фиг. 6

скорости, при которой происходит слияние корней и переход к неустойчивости. Штрихпунктирной линией показано значение фазовой скорости волны Релея c_R . Для наиболее практически важного случая $m = 1$ при разных значениях ν получаем

ν	0.0	0.3	0.4	0.45	0.5
V_{cr}	1.401	1.606	1.692	1.740	1.793
c_{cr}	0.631	0.654	0.650	0.644	0.635

Далее, рассмотрим корни c , которые при $k \rightarrow \infty$ удовлетворяют условию $1 < |c| < 1/a$. В таком случае функция $\beta(c)$ станет чисто мнимой, и соответствующий гиперболический тангенс превратится в тригонометрический. А именно, дисперсионное уравнение (5.2) при $k \rightarrow \infty$ превращается в следующее:

$$\langle [(2 - c^2)^2 (1 - (\alpha\beta')^{-1} \operatorname{th} k\beta') + 4(1 + \alpha\beta' \operatorname{tg} k\beta')] \rangle = \\ = mc^2(V - c)^2(\beta'^{-1} \operatorname{tg} k\beta' - \alpha)$$

где $\beta'(c) = \sqrt{c^2 - 1}$. Перепишем его в виде

$$\frac{\operatorname{tg} k\beta'}{\alpha\beta'} (- (2 - c^2)^2 + 4\alpha^2\beta'^2 - mc^2(V - c)^2\alpha) = - (2 - c^2)^2 - 4 - mc^2(V - c)^2\alpha \quad (6.3)$$

Рассмотрим сначала случай $m = 0$. Правая часть уравнения отрицательна. Множитель в скобках левой части может на отрезке $|c| \in [1, 1/a]$ быть отрицательным или иметь два нуля $|c| = c_{1,2}$, $1 < c_1 < c_2 < 1/a$, между которыми он положителен и отрицателен в противном случае. В случае отрицательного множителя графики левой и правой (жирные линии) частей уравнения (6.3) на отрезке $|c| \in [1, 1/a]$ показаны на фиг. 6,а. Уравнение имеет по одному корню на каждом отрезке периодичности тангенса, независимо от значений правой части. Очевидно, что ненулевые значения m только уменьшат

множитель, что приведет к изменению корней, но не к их взаимодействию. Переход к неустойчивости при этом, очевидно, невозможен.

Пусть теперь при $m = 0$ имеется интервал (c_1, c_2) , на котором множитель в скобках левой части (6.3) положителен, а значит, график всей левой части имеет две “петли”, соответствующие нулям $c_{1,2}$, как показано на фиг. 6,б (жирными линиями показаны петли). При этом, поскольку около асимптот тангенс ведет себя как $1/(k\beta')$, при больших k петли между двумя нулями пренебрежимо мало отклоняются от нуля, так что можно считать их знакопостоянными. В таком случае одной из петель при $m = 0$ соответствуют два корня, другой – ни одного. При увеличении m правая часть уравнения уменьшается, не меняя знак, нули левой части $c_{1,2}$ сближаются и исчезают. Этому соответствует сближение двух петель и их исчезновение, после чего качественный вид левой части соответствует фиг. 6,а и далее не меняется ни при каких m . Ясно, что поскольку правая часть всегда отрицательна, то в процессе сближения и исчезновения ветвей, и тем более после него, взаимодействие корней и переход к неустойчивости невозможны.

Наконец, рассмотрим случай фазовых скоростей $|c| > 1/a$. Воспользуемся дисперсионным уравнением в форме (3.9) и, заменяя гиперболические функции на тригонометрические, при $k \rightarrow \infty$ получим уравнение

$$\begin{aligned} & \langle [(2 - c^2)^2 (\cos k\alpha' \cos k\beta' - (\alpha'\beta')^{-1} \sin k\alpha' \sin k\beta') + \\ & + 4(\cos k\alpha' \cos k\beta' - \alpha'\beta' \sin k\alpha' \sin k\beta') - 4(2 - c^2)] \rangle = \\ & = mc^2(V - c)^2\beta'^{-1} [\cos k\alpha' \sin k\beta' + \alpha'\beta' \sin k\alpha' \cos k\beta'] \end{aligned}$$

где

$$\alpha'(c) = \sqrt{a^2c^2 - 1} > 0, \quad \beta'(c) = \sqrt{c^2 - 1} > 0$$

Домножим его на $2\alpha'\beta'$ и преобразуем. Сначала перепишем левую часть в виде

$$\begin{aligned} & A_{1+} \cos(k(\alpha' + \beta')) - A_{1-} \cos(k(\alpha' - \beta')) - C \\ & A_{1\pm} = (2 - c^2)^2 + 4\alpha'^2\beta'^2 \pm (2 - c^2)^2\alpha'\beta' \pm 4\alpha'\beta', \quad C = 8\alpha'\beta'(2 - c^2) \end{aligned}$$

Докажем, что

$$|A_{1+}| > |A_{1-}| + |C| \tag{6.4}$$

Тогда на каждом отрезке между минимумом и максимумом $\cos(k(\alpha' + \beta'))$ левая часть дисперсионного уравнения имеет хотя бы один нуль. Очевидно, что $A_{1+} > 0$, т.е. $|A_{1+}| = A_{1+}$. Далее рассмотрим два случая: $A_{1-} \geq 0$ и $A_{1-} < 0$. В первом случае имеем

$$A_{1+} > A_{1-} + 8\alpha'\beta'|2 - c^2|$$

что эквивалентно

$$\alpha'\beta'(|2 - c^2| - 2)^2 > 0$$

Во втором случае аналогичным образом получим

$$(|2 - c^2| - 2\alpha'\beta')^2 > 0$$

В обоих случаях приходим к верным неравенствам; таким образом, неравенство (6.4) доказано.

Теперь преобразуем правую часть к виду

$$A_{2+} \sin(k(\alpha' + \beta')) - A_{2-} \sin(k(\beta' - \alpha')), \quad A_{2\pm} = mc^2(V - c)^2 \alpha'(1 \pm \alpha' \beta')$$

Таким образом, все дисперсионное уравнение переписывается в виде

$$A_+ \cos(k(\alpha' + \beta') + \varphi_1) - A_- \cos(k(\beta' - \alpha') + \varphi_2) - C = 0 \quad (6.5)$$

$$A_{\pm} = \sqrt{A_{1\pm}^2 + A_{2\pm}^2}$$

где $\varphi_1(c)$ и $\varphi_2(c)$ – некоторые функции. Из неравенства (6.4) и того, что $|A_{2+}| > |A_{2-}|$, следует, что

$$|A_+| > |A_-| + |C| \quad (6.6)$$

Тогда на каждом отрезке между ближайшими максимумом и минимумом $\cos(k(\alpha' + \beta') + \varphi_1)$ уравнение (6.5) имеет хотя бы один нуль. Нетрудно доказать, что он только один на каждом отрезке, поскольку k – большое число. В таком случае все нули отделены друг от друга точками максимума и минимума функции $\cos(k(\alpha' + \beta') + \varphi_1)$ и не могут взаимодействовать и приводить к неустойчивости. В результате доказано, что неустойчивость при $k \rightarrow \infty$ может реализовываться только при $|c| < 1$.

7. Устойчивость длинных волн. В отличие от коротких волн, где влияние гравитации исчезало, в случае очень длинных волн гравитационные члены, вообще говоря, существенны. Однако в разд. 5 было показано, что их учет не имеет практического смысла, так как при всех длинах волн, которые вообще имеет смысл рассматривать, эти члены пренебрежимо малы. Таким образом, будем полагать $g = 0$, понимая под “длинными” такие волны, что их длина много больше толщины слоя, но, с другой стороны, не настолько большая, чтобы было необходимо учитывать гравитационные члены.

Оценим влияние толщины слоя жидкости L , которая входит в дисперсионное уравнение только в виде $\text{th}kL$. Поскольку эта функция отличается от единицы менее чем на 1% при $kL > 2.65$, а при рассмотрении волн, длина которых не превышает 100 толщин, $k > 0.063$, то для исключения влияния величины L достаточно потребовать $L > 42$. На практике в основном представляют интерес волны, длины которых не больше 5–10 толщин слоя, для них влияние L исчезает при гораздо более тонких слоях жидкости.

Таким образом, далее будем полагать, что толщина слоя жидкости достаточно большая для всех рассматриваемых длин волн, так что $\text{th}kL$ можно заменить на единицу. В результате, дисперсионное уравнение сводится к следующему:

$$(2 - c^2)^2 (\text{ch}k\alpha \text{ch}k\beta - (\alpha\beta)^{-1} \text{sh}k\alpha \text{sh}k\beta) +$$

$$+ 4(\text{ch}k\alpha \text{ch}k\beta - \alpha\beta \text{sh}k\alpha \text{sh}k\beta) - 4(2 - c^2) =$$

$$= mc^2(V - c)^2 \beta^{-1} [\text{ch}k\alpha \text{sh}k\beta - \alpha\beta \text{sh}k\alpha \text{ch}k\beta] \quad (7.1)$$

Устремим в нем $k \rightarrow 0$, предполагая, что $c(k) \not\rightarrow \infty$. Получим

$$(2 - c^2)^2 + 4 - 4(2 - c^2) = 0 \Rightarrow c^4 = 0$$

Таким образом, кроме тривиального решения, остальные корни неограниченно растут при $k \rightarrow 0$. Это позволяет упростить дисперсионное уравнение (7.1). Будем учитывать, что $\alpha(c)$ и $\beta(c)$ станут чисто мнимыми, и гиперболические функции станут

тригонометрическими. В дисперсионном уравнении отбросим члены порядка меньше, чем c^3 , оставляя при этом члены с V :

$$c^4 \operatorname{ch} k \alpha \operatorname{ch} k \beta = m c^2 (V - c)^2 \beta^{-1} \operatorname{ch} k \alpha \operatorname{sh} k \beta - m c^2 (V - c)^2 \alpha \operatorname{sh} k \alpha \operatorname{ch} k \beta$$

или, деля на $\operatorname{ch} k \alpha$ и учитывая, что $\beta \approx i c$, $\alpha \approx i a c$, получим

$$\left(\frac{c}{m a (V - c)^2} - \operatorname{tg} k a c \right) \operatorname{cos} k c = \frac{\operatorname{sin} k c}{a c^2} \tag{7.2}$$

Сначала рассмотрим первое приближение, положив правую часть нулю. Часть корней дается выражением

$$\operatorname{cos} k c = 0 \Rightarrow c_n \approx \frac{1}{k} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{7.3}$$

Остальные корни удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{tg} k a c = \frac{c}{m a (V - c)^2} \tag{7.4}$$

При этом на каждом промежутке

$$\frac{1}{a k} \left(\frac{\pi}{2} + \pi s \right) < c_s < \frac{1}{a k} \left(\frac{\pi}{2} + \pi (s + 1) \right), \quad s \in \mathbb{Z} \tag{7.5}$$

кроме $s = -1$, при $V < \pi / (a k)$ существует ровно один корень уравнения (7.4). Поскольку они изолированы друг от друга, слияние и переход к неустойчивости возможны только при взаимодействии с корнями семейства (7.3).

Найдем минимальную скорость V , при которой эти корни совпадают. Для этого подставим выражение (7.3) в уравнение (7.4) и решим его относительно V :

$$V = \frac{1}{k} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{m a \operatorname{tg} (a (\pi / 2 + \pi n))} \tag{7.6}$$

При малых k минимальные значения V достигаются при $n = 0$, т.е.

$$V_{\pm} = \frac{1}{k} \frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{m a \operatorname{tg} (a \pi / 2)} \tag{7.7}$$

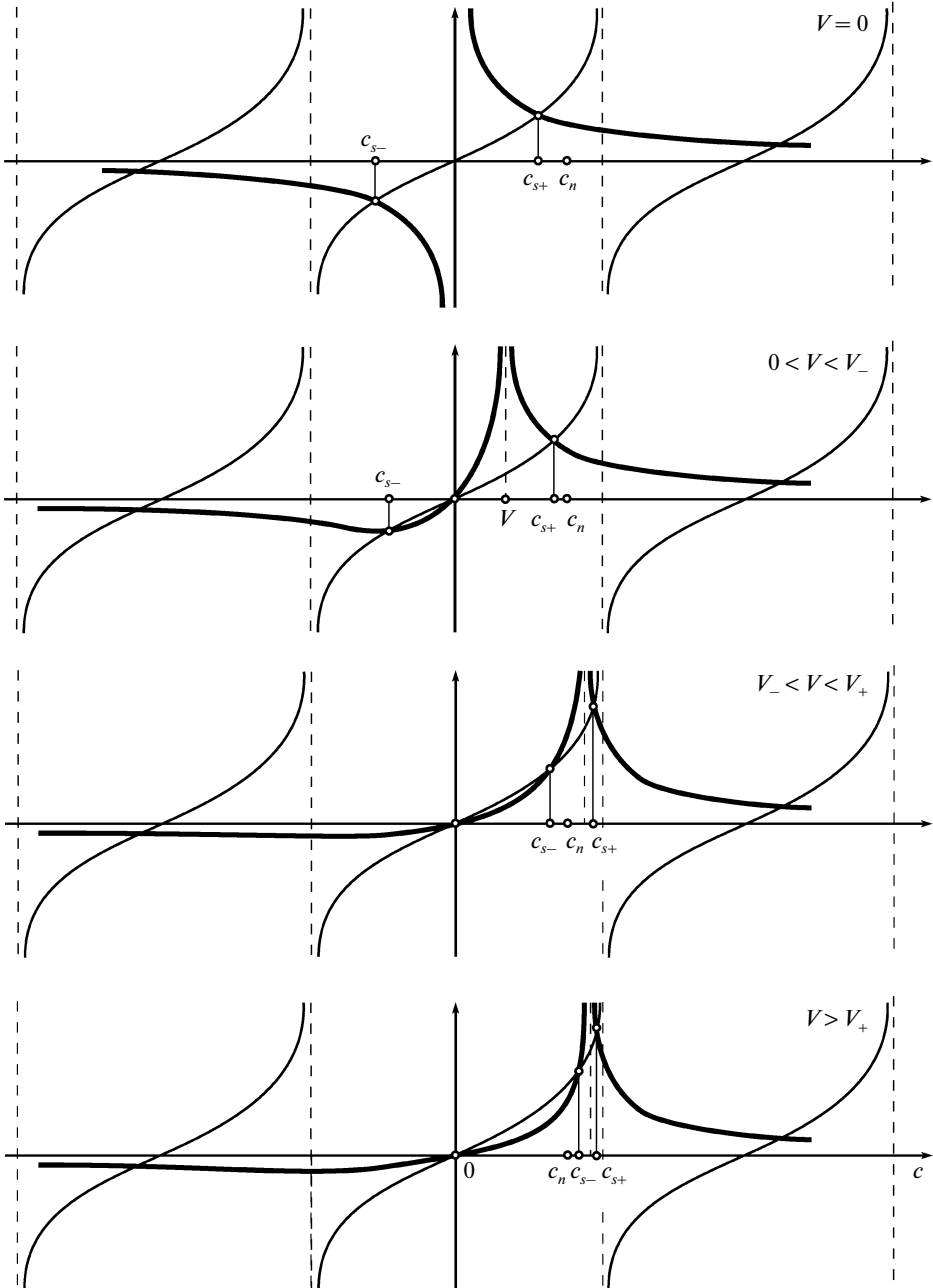
Выясним физический смысл совпадающих при V_{\pm} корней. Графики левой (тонкие линии) и правой (жирные) части равенства (7.4) при увеличении значения V показаны на фиг. 7. Видно, что

а) при $V = 0$ имеются два наименьших по модулю корня уравнения (7.4), которые с возрастанием V увеличиваются,

б) при $V = V_-$ положительный корень уравнения (7.4) совпадает с наименьшим корнем семейства (7.3) и продолжает возрастать с увеличением V ,

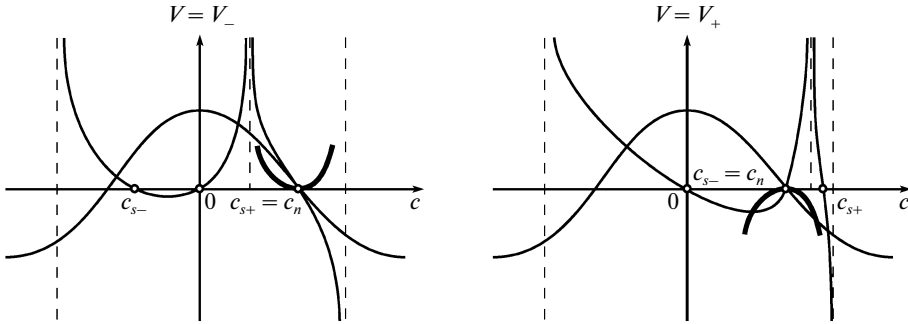
в) отрицательный корень становится положительным и при $V = V_+$ совпадает с наименьшим корнем семейства (7.3),

г) далее, при $V > V_+$ он также продолжает возрастать.



Фиг. 7

Таким образом, при $V = V_-$ сливаются волны, бегущие при $V = 0$ вниз, а при $V = V_+$ — вверх и вниз по потоку. Можно показать, что к неустойчивости приводит лишь второе слияние при $V = V_+$.



Фиг. 8

Для доказательства рассмотрим следующее приближение к дисперсионному уравнению, учтя правую часть равенства (7.2), которая при слиянии корней всегда положительна, так что устойчивость определяется знаком левой части в окрестности $c = c_n$ при $V = V_{\pm}$. Пользуясь фиг. 7, легко построить график левой части равенства (7.2). На фиг. 8 показаны графики каждого сомножителя левой части (тонкие линии) и их произведения (жирные) при скорости потока $V = V_-$ (левая часть фиг. 8) и $V = V_+$ (правая часть). Как видно, при $V = V_-$, когда сливаются ветви, соответствующие бегущим вниз по потоку волнам, левая часть в окрестности $c = c_n$ положительна, и корни остаются вещественными – перехода к неустойчивости нет. Однако при $V = V_+$ левая часть в этой окрестности отрицательна, что означает наличие промежутка скоростей потока $V_+ - \varepsilon < V < V_+ + \varepsilon$, где вещественные корни исчезают, приводя к комплексно-сопряженной паре, т.е. к неустойчивости. Аналогично доказывается, что при $V < V_+ - \varepsilon$ другие возможные совпадения корней семейства (7.3) с корнями уравнения (7.4) в интервалах (7.5) с $s \neq -1$ не приводят к неустойчивости.

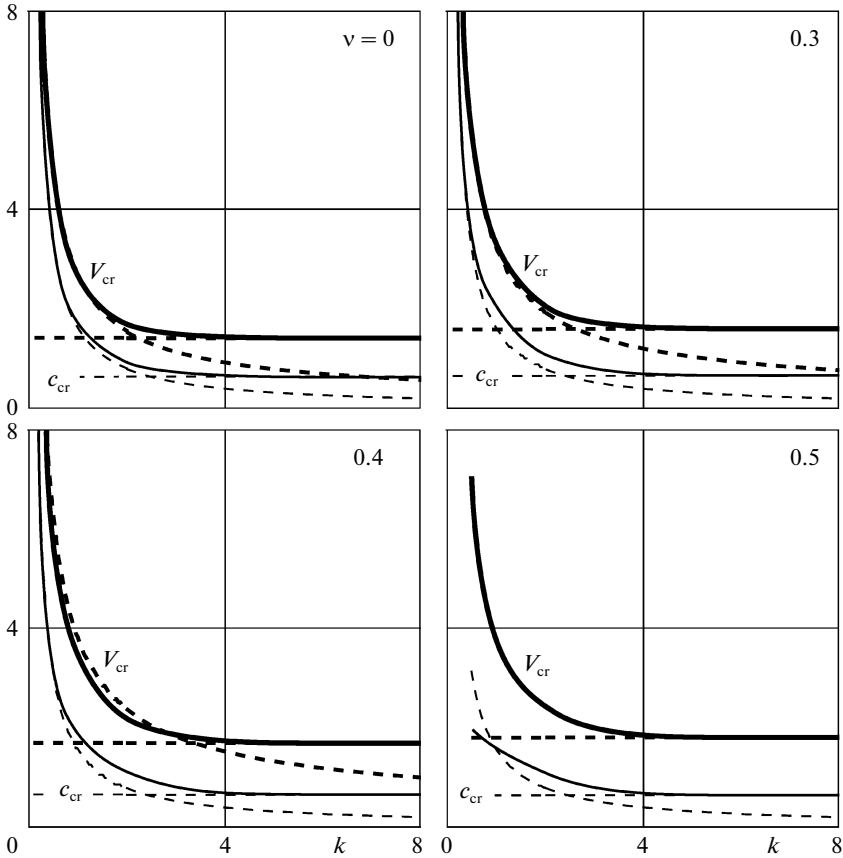
Таким образом, V_+ – критическая скорость, при которой длинные волны становятся неустойчивыми.

8. Поведение волн в окрестности $c = 0$. Выше показано, что слияние фазовых скоростей волн и переход к неустойчивости происходит между волнами, которые при $V = 0$ движутся вниз и вверх по потоку. До перехода к неустойчивости, т.е. при $V < V_{cr}$ фазовая скорость бегущей вверх по потоку волны проходит через нуль, где пересекается с всегда существующим решением уравнения (7.1) $c = 0$. Исследуем поведение в момент пересечения корней и найдем скорость V_0 , при которой фазовая скорость бегущей вниз по потоку волны становится нулевой. Для этого рассмотрим уравнение (7.1) в окрестности $c = 0$. Разлагая входящие в него функции по формуле Тейлора с точностью до c^4 , получаем

$$c^4(k^2(1 - a^2)^2 + 1 + \text{sh}^2 k(1 - a^4)) = c^4 \frac{m}{2} (V - c)^2 (\text{sh} k \text{ch} k(1 + a^2) - k(1 - a^2)) \quad (8.1)$$

Таким образом, корень $c = 0$ имеет кратность четвертого порядка и не взаимодействует с проходящими через эту точку другими корнями. Сокращая на c^4 , находим скорость, при которой бегущая вверх по потоку волна проходит через $c = 0$ и становится бегущей вниз по потоку:

$$V_0(k) = \sqrt{\frac{2(1 - a^2)^2 k^2 + 1 + (1 - a^4) \text{sh}^2 k}{m(1 + a^2) \text{sh} k \text{ch} k - (1 - a^2) k}}$$



Фиг. 9

Нетрудно убедиться, что и числитель, и знаменатель второй дроби под корнем положительны при любом k .

Поскольку всегда $V_0(k) < V_{cr}(k)$, неравенство $V < V_0(k)$ можно использовать как достаточное условие устойчивости для волн заданной длины.

Расчеты для всего диапазона $0 < a < \sqrt{3}/2$ показывают, что минимум $V_0(k)$ достигается при $k \rightarrow \infty$ и равен

$$V_{0\min} = \sqrt{\frac{2}{m} \frac{1-a^4}{1+a^2}}$$

9. Промежуточные значения длин волн. Ввиду сложности дисперсионного уравнения (7.1), исследовать его аналитически при произвольных k не удалось, поэтому проведен численный анализ. Методом Ньютона для систем уравнений решались два уравнения относительно V_{cr} и c_{cr} : (7.1) и оно же, продифференцированное по c . При этом искался наименьший по V корень, соответствующий ненулевому значению c . Расчеты проведены при $m = 1$ и значениях $\nu = 0, 0.3, 0.4, 0.5$. Результаты представлены на фиг. 9, сплошными жирными и тонкими линиями показаны $V_{cr}(k)$ и $c_{cr}(k)$, соответственно.

Асимптотические значения $V_{cr}(k)$ и $c_{cr}(k)$ при $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$ показаны штриховыми линиями.

Как видно, численные значения приближаются к асимптотическим при $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$ (за исключением случая $k \rightarrow 0$ при $\nu = 0.5$, когда $a = 0$ и V_+ становится бесконечно большим). При этом минимум $V_{cr}(k)$ достигается при $k \rightarrow \infty$ во всех рассчитанных случаях. Это позволяет использовать значения V_{cr} с графиков на фиг. 5 как минимальные по k критические скорости, ниже которых система устойчива.

10. Влияние на устойчивость вязкоупругих свойств материала. При гармонических колебаниях вязкоупругие свойства материала приводят к появлению мнимых частей упругих модулей, в общем случае зависящих от частоты колебаний. Эксперименты показывают [24], что при этом коэффициент Пуассона ν с высокой точностью остается вещественным, и комплексным становится только модуль Юнга:

$$E = E_0(1 - 2i\omega\varepsilon(\omega)), \quad \varepsilon(\omega) = \delta(\omega)/E_0$$

где $\delta(\omega) > 0$ – коэффициент вязкости, который будем считать малой величиной по сравнению с E_0/ω . На примере конкретных параметров задачи было показано [18], что малая вязкость оказывает дестабилизирующее воздействие на назад бегущую волну при скоростях потока, когда она становится вперед бегущей, т.е. при $V > V_0(k)$. Докажем это в общем случае.

Сначала оценим влияние вязкости среды на скорость a_2 :

$$a_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} = \sqrt{\frac{E_0}{2\rho(1+\nu)}} \sqrt{1 - 2i\omega\varepsilon(\omega)} \approx a_{20}(1 - i\omega\varepsilon(\omega))$$

Таким образом, величина a_2 , которая была принята в качестве масштаба при переходе к безразмерным величинам (3.8), становится комплексной, вследствие чего целесообразно оценивать влияние вязкости на затухание волн в размерном виде.

В этом разделе безразмерные величины опять будем помечать штрихом. Поскольку безразмерный параметр a' зависит только от ν , он остается вещественным, и единственный безразмерный параметр, испытывающий влияние вязкости – безразмерная скорость $V' = V/a_2$. Тогда получаем

$$c = c'(V'(a_2))a_2$$

Отсюда видно, что при $V = 0$ (покояющаяся жидкость) безразмерные фазовые скорости не зависят от вязкости и вещественны, что соответствует затухающим колебаниям в размерном виде.

Исследуем влияние вязкости при $V \neq 0$. Для этого вычислим производную

$$\left. \frac{dc}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -ia_{20}\omega \frac{dc}{da_2} = -ia_{20}\omega \left(c' - \frac{dc'}{dV'} V' \right) = -ia_{20}^2 k \left(c'^2 - V' c' \frac{dc'}{dV'} \right) \quad (10.1)$$

Получаем, что затухание или рост волн в присутствии малой вязкости определяется положительностью или отрицательностью выражения $c'^2 - V' c' dc'/dV'$, вычисляемом без учета вязкости, что позволяет использовать для анализа результаты предыдущих разделов. Для назад бегущей волны, соответствующей наименьшей по модулю фазовой скорости, это выражение положительно при $V < V_0(k)$, т.к. $V' > 0$, $c' < 0$, $dc'/dV' > 0$, т.е. эта волна затухает. При $V = V_0(k)$ оно обращается в нуль (поскольку $c' = 0$) и становится отрицательным при $V > V_0(k)$. Таким образом, при скорости потока, соответствующей сносу назад бегущей волны и ее преобразованию во вперед бегущую, затухание волны сменяется ее усилением под действием вязкоупругих свойств покрытия. Отме-

тим, что смена затухания на рост колебаний под действием малой вязкости имеет место и при комплексных значениях ν , отличие будет лишь в выражении (10.1), где будет содержаться также производная dc'/da' , однако все выражение так же будет менять знак при $c' = 0$.

Таким образом, неустойчивость, вызванная вязкостью, обнаруженная в [18] для конкретного набора параметров, имеет место и в общем случае. Эта неустойчивость, с одной стороны, наступает раньше неустойчивости в упругом случае ($V_0(k) < V_{cr}(k)$), с другой стороны, она более слабая, и скорости усиления колебаний стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Аналогичный эффект дестабилизации вязкостью назад бегущей волны при скорости потока, когда она становится вперед бегущей, имеет место и в более простой модели податливого покрытия в виде пластины на упругом основании [3]. Считается, что вызванная вязкостью неустойчивость на практике проявляется в виде статической деформации покрытия, т.е. дивергенции, а “упругая” неустойчивость имеет колебательный характер, т.е. является флаттером [3, 18].

Смена затухания волны на усиление и наоборот во всех остальных случаях (т.е. при $c' \neq 0$) имеет место при смене знака выражения $(c'/V') - (dc'/dV')$. Ограничимся здесь анализом коротких волн и наименьших по модулю фазовых скоростей, для которых расчеты кривых $c'(V')$ показывают выпуклость вверх для вперед бегущей и выпуклость вниз для назад бегущей волны (фиг. 2). Для назад бегущей волны из равенства (8.1) следует $dc'/dV' = 1$ при $V = V_0$, из результатов разд. 6 следует $c'/V' < 1$ при $V = V_{cr}$. Тогда из выпуклости вниз получаем $(c'/V') - (dc'/dV') < 0$ в диапазоне $V'_0 < V < V'_{cr}$, т.е. эта волна остается растущей в случае малой вязкости вплоть до возникновения основной “упругой” неустойчивости. Для вперед бегущей волны достаточно рассмотреть участок $0 < V < c'_R$, где функция $c'(V')$ возрастает, т.к. на участке $c'_R < V < V'_{cr}$ она убывает, и вязкость не может привести к усилению волн. Воспользовавшись уравнением (6.2), можно выразить функцию $V'(c')$ и показать, что $dV'/dc' > 1$ при $V' = 0$. Следовательно, $dc'/dV' < 1$. В то же время $c' = V'$ при $V' = c'_R$ (разд. 6), т.е. $c'/V' = 1$. Тогда из выпуклости вверх получаем, что на всем участке $0 < V < V'_{cr}$ вязкость материала приводит к затуханию вперед бегущей волны.

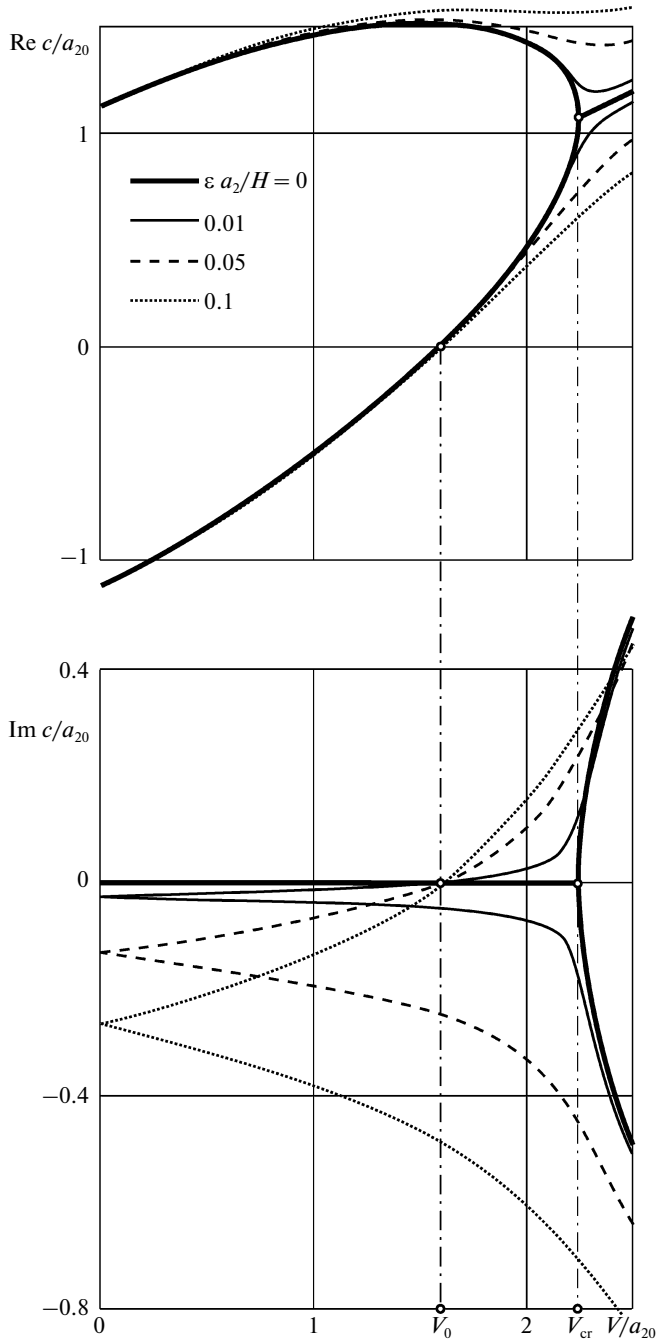
На фиг. 10 для примера показаны графики вещественной и мнимой части c/a_{20} как функции V/a_{20} при параметрах (5.1) и $m = 1, g = 0$ для разных значений $\varepsilon a_2/H$.

11. Анализ резонансных длин волн. Для каждого решения дисперсионного уравнения $c(k)$ существует собственная функция – ненулевое решение системы линейных уравнений для $c_0, c_{j1}, c_{j2}, c_{31}, c_{32}$ (разд. 3). Это решение находилось численно.

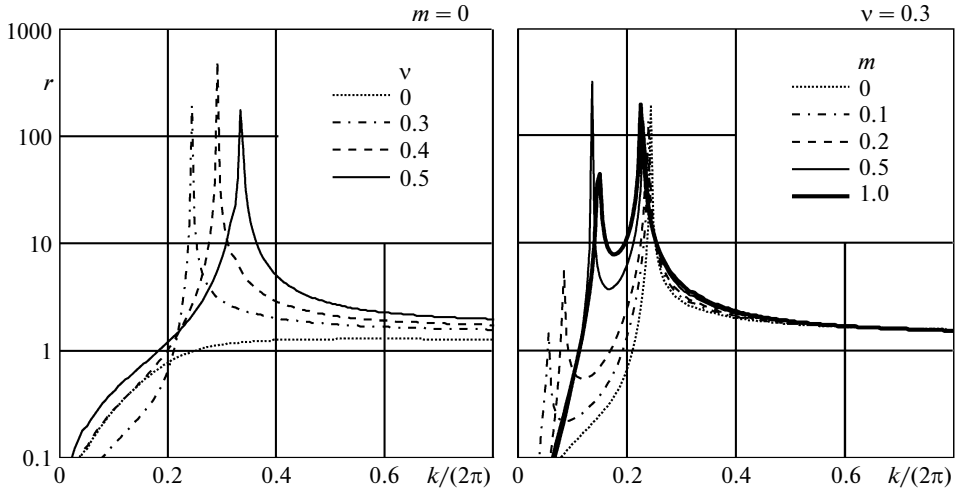
В качестве относительной амплитуды вертикального смещения верхней поверхности упругого слоя будем использовать величину

$$r = \left| \frac{v}{u} \right| = \left| \frac{\lambda_1 c_{11} - \lambda_1 c_{12} - ikc_{21} - ikc_{22}}{ikc_{11} + ikc_{12} + \lambda_2 c_{21} - \lambda_2 c_{22}} \right|$$

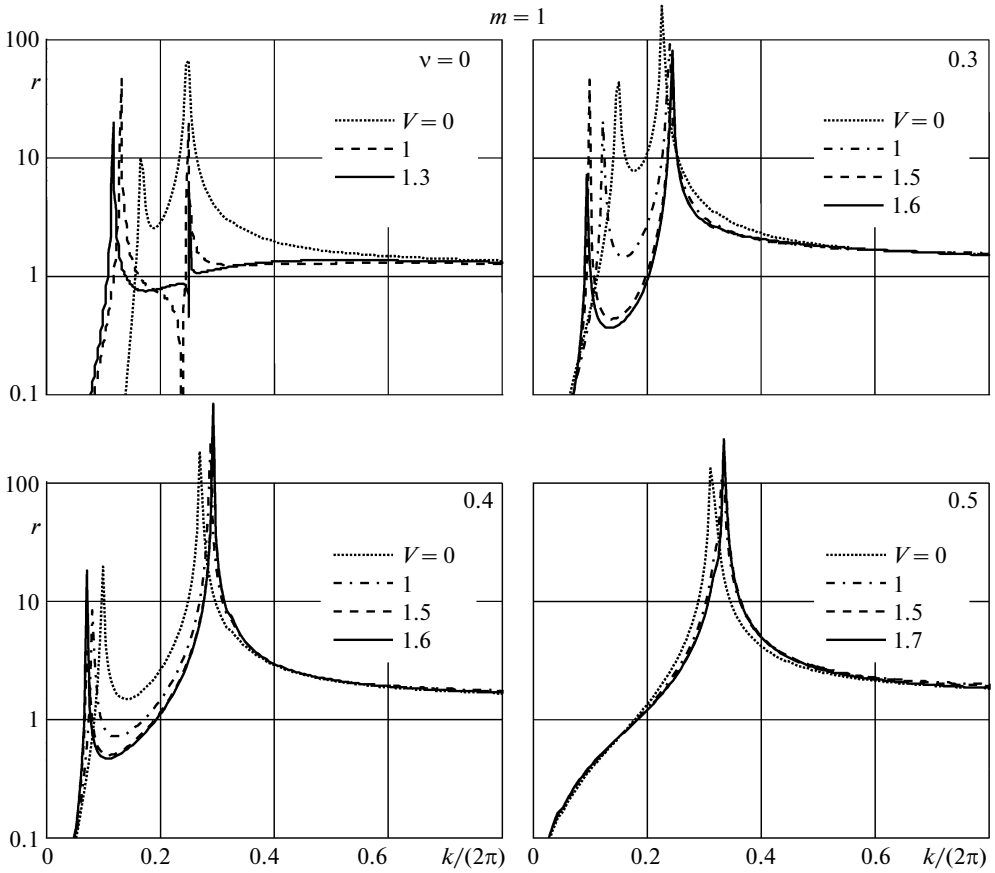
Рассматривается только первая мода, соответствующая вперед бегущей волне. Для случая $m = 0$ в левой части фиг. 11 показаны зависимости $r(k/(2\pi))$, где $k/(2\pi) = H/\lambda$ – отношение толщины слоя к длине волны. Результаты совпадают с известными [15]. Как видно, при $\nu > 0$ существует резонансная длина волны, равная 3–4 толщинам, для которой практически вся поверхностная энергия уходит в вертикальное смещение поверхности упругого слоя. Было экспериментально показано [15], что на резонансных длинах волн амплитуда волн в покрытии и его влияние на поток наиболее существенны. В правой части фиг. 11 на примере случая $\nu = 0.3$ дана модификация r при появлении покоящейся жидкости ($V = 0$) и увеличения ее плотности. Видно, что помимо ос-



Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12

новного пика, положение которого практически не меняется, появляется второй резонансный пик, соответствующий длине волны, равной 5–20 толщин (в зависимости от m). Второй пик наблюдается в присутствии жидкости во всех рассмотренных случаях, кроме $\nu = 0.5$ (фиг. 12).

Расчеты $r(k/(2\pi))$ в присутствии движущейся жидкости со скоростями вплоть до V_{cr} показаны на фиг. 12 для различных значений ν . Вычисления проведены при $m = 1$. Видно, что положение “основного” пика с $\lambda \sim 3H$ практически не меняется, в то время как движение второго пика несколько более существенно. Полученные результаты показывают, что основная резонансная длина волны практически не зависит от скорости движения жидкости и ее плотности.

12. Модификация методики выбора покрытий. В соответствии с имеющимися результатами [15] для обеспечения оптимального взаимодействия покрытия с турбулентным пограничным слоем должны выполняться следующие критерии:

1) частота колебаний должна лежать в диапазоне [25]

$$6.67 \times 10^{-3} < \frac{fv_f}{u_\tau^2} < 2.00 \cdot 10^{-2}$$

Здесь $f = \omega/(2\pi)$ – физическая размерная частота колебания, v_f – кинематическая вязкость жидкости, $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ – пристенный масштаб скорости. В безразмерном виде

$$6.67 \times 10^{-3} < \frac{c(k)k}{2\pi u_\tau^2} \frac{v_f}{Ha_2} < 2.00 \cdot 10^{-2} \tag{12.1}$$

2) фазовая скорость должна соответствовать скорости движения турбулентных структур: $c(k) = (0.7...0.9)V$,

3) покрытие должно наилучшим образом воздействовать на пульсации давления, для чего длина волны должна быть близка к резонансной: $\lambda \approx 3H$, т.е. $k \approx 2.09$.

Выше было показано, что при $m \neq 0$ может возникать неустойчивость, которой необходимо избегать для сохранения эффективности покрытия. Таким образом, добавляется еще одно условие:

4) условие гидродинамической устойчивости покрытия:

$$V < V_{cr}$$

В качестве критерия устойчивости здесь использован критерий “упругой” устойчивости: при возникновении такой неустойчивости происходит дополнительная генерация турбулентности за счет колебания поверхности и сокращается срок службы покрытий. “Вязкая” неустойчивость, по-видимому, не так опасна, поскольку проявляется в виде статической деформации покрытия и может при малой вязкости подавляться за счет взаимодействия с пограничным слоем [18].

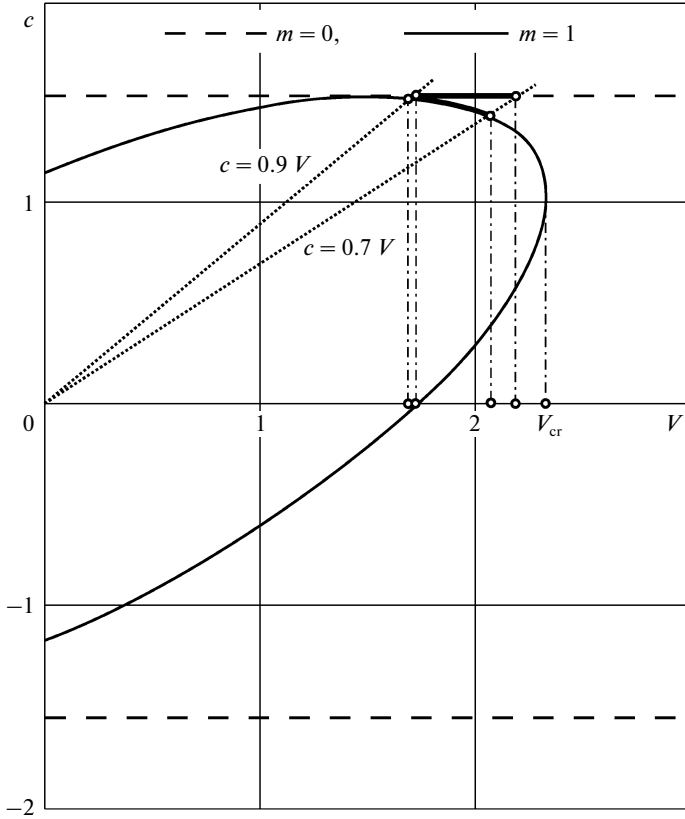
Второе и третье условия в совокупности дают диапазон скоростей потока, в котором возможно эффективное воздействие покрытия:

$$0.7V \leq c(k = 2.09, V) \leq 0.9V \tag{12.2}$$

В случае $m \neq 0$, т.е. при зависимости c от V это условие представляет собой неравенства для определения диапазона скоростей потока V .

Четвертое условие ограничивает сверху диапазон возможных значений m , при которых покрытие устойчиво в полученном диапазоне скоростей V .

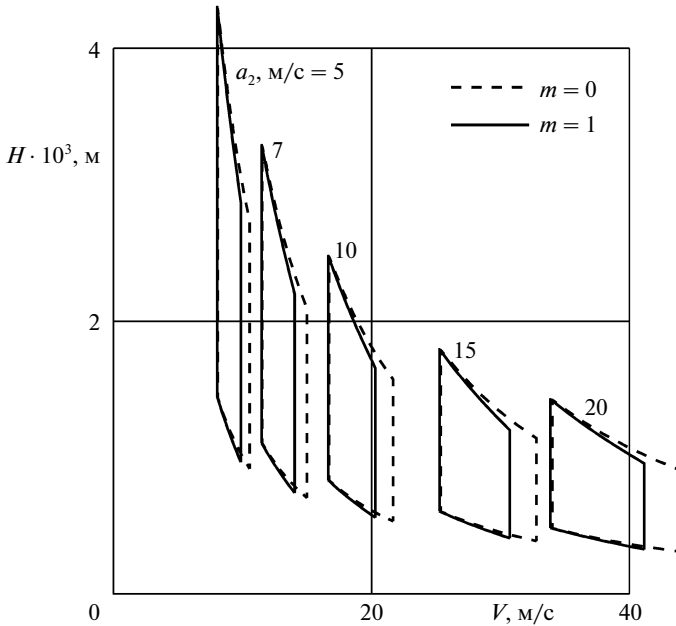
Условие (12.1) дает диапазон толщин покрытий при заданных свойствах материала.



Фиг. 13

Отметим два отличия от существующих критериев [15]. Во-первых, из-за зависимости c от V при решении неравенств (12.2) при $m \neq 0$ получается диапазон скоростей, меньший по абсолютным значениям и более короткий, чем при $m = 0$. Действительно, графическое решение дисперсионного уравнения относительно $c(V)$ и неравенств (12.2) на примере $\nu = 0.5$, $m = 0, 1$ показано на фиг. 13, откуда следует сказанное. Во-вторых, в случае, если жидкость (а следовательно, и ее плотность) известна (например, рассматривается движение воды), то по сравнению с имеющимися критериями [15], дополнительно появляется ограничение, налагаемое на минимальную плотность покрытия, обеспечивающую его устойчивость.

Например, решая неравенства (12.2) при $\nu = 0.5$ (фиг. 13), находим: $V = 1.709 \dots 2.198$ при $m = 0$ и $V = 1.702 \dots 2.065$ при $m = 1$. По фиг. 5 находим, что при $m = 1$ покрытие устойчиво при $V \leq 1.793$, т.е. для устойчивой работы остается лишь узкий интервал скоростей $1.702 \leq V \leq 1.793$. Для обеспечения устойчивости во всем диапазоне необходимо, чтобы $m \leq 0.5$, т.е. в случае воды с $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$ получаем $\rho \geq 2000 \text{ кг/м}^3$. Далее, выбором модуля Юнга определяется размерная скорость a_2 , а ею — диапазон размерных скоростей потока и толщин покрытия.



Фиг. 14

Приведем результаты подбора свойств покрытий для $\nu = 0.475$ в размерном виде, полученные при различных скоростях a_2 , для течения в воде. Для выбора толщины покрытия, как и ранее [15], воспользуемся соотношением ([26], гл. XXI, §1)

$$u_\tau = 0.172u \text{Re}_x^{-1/10}, \quad \text{Re}_x = \frac{Vx}{\nu_f} = \frac{V'a_2x}{\nu_f}$$

где V и V' – размерная и безразмерная скорости. Примем вязкость воды $\nu_f = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, характерный размер $x = 1 \text{ м}$. Результаты показаны на фиг. 14 в виде областей в плоскости $V, \text{ м/с} - H, \text{ м}$, удовлетворяющих критериям (12.1), (12.2) при различных значениях скорости поперечной волны $a_2, \nu = 0.475, m = 0, 1$. Как видно, во всех случаях учет зависимости фазовой скорости от V приводит к уменьшению рабочего диапазона скоростей, при этом диапазон толщин меняется несущественно. Из условия устойчивости находим приблизительно $m \leq 0.5$. Выберем плотность материала наименее возможной, $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$. Рабочий диапазон скоростей возьмем от 17 до 20 м/с, тогда необходимо, чтобы $a_2 = 10 \text{ м/с}$. Из равенства

$$a_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}$$

следует $E = 0.59 \text{ МПа}$.

Таким образом, для диапазона скоростей воды от 17 до 20 м/с оптимальное покрытие – слой материала толщиной от 1 до 1.7 мм с

$$E = 0.59 \text{ МПа}, \quad \nu = 0.475, \quad \rho = 2000 \text{ кг/м}^3$$

13. Заключение. Доказано, что вязкоупругое покрытие, находящееся под слоем движущейся жидкости, может терять устойчивость при достаточно большой скорости жидкости V . При скорости $V = V_0$, соответствующей сносу назад бегущей волны и ее превращению во вперед бегущую, неустойчивость возникает лишь при наличии вязких свойств покрытия. При достижении скорости $V = V_{cr} > V_0$ происходит слияние фазовых скоростей двух бегущих вперед волн и возникновение более сильной неустойчивости, не исчезающей в чисто упругом случае. В то время как “упругая” неустойчивость покрытия нежелательна, поскольку может приводить к дополнительной генерации турбулентности и разрушению покрытия, “вязкая” неустойчивость требует дополнительного изучения. В случае малой вязкости эта неустойчивость может подавляться за счет взаимодействия с пограничным слоем; в противном случае ее возникновение также может быть допустимым, если амплитуда установившегося выпучивания покрытия мала и не превышает толщины ламинарного подслоя, т.е. покрытие остается гидравлически гладким.

Показано, что резонансные длины волн, равные 3–5 толщинам покрытия, при которых граница раздела совершает строго вертикальные колебания, практически не испытывают влияния жидкости. Оценка влияния движущейся жидкости на эффективность податливых покрытий, используемых для снижения турбулентного трения, показала, что уменьшается рабочий диапазон скоростей и появляется дополнительное ограничение на плотность материала покрытия для его работы в области устойчивости.

Автор благодарит В.М. Кулика и А.В. Бойко за обсуждения полученных результатов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (14-01-00052) и грантом Президента РФ (МД-4544.2015.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kramer M.O.* Boundary layer stabilization by distributed damping // *J. Amer. Soc. Nav. Engrs.* 1960. V. 72. Issue 1. P. 25–34.
2. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces: Part 1. Tollmien-Schlichting instabilities // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 155. P. 465–510.
3. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces: Part 2. Flow-induced surface instabilities // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 170. P. 199–232.
4. *Yeo K.S.* The stability of boundary-layer flow over single and multi-layer viscoelastic walls // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 196. P. 359–408.
5. *Савенков И.В.* Подавление роста нелинейных волновых пакетов упругостью обтекаемой поверхности // *Ж. вычисл. матем. матем. физ.* 1995. Т. 35. Вып. 1. С. 95–103.
6. *Lingwood R.J., Peake N.* On the causal behaviour of flow over an elastic wall // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 396. P. 319–344.
7. *Wiplier O., Ehrenstein U.* On the absolute instability in a boundary-layer flow with compliant coatings // *Europ. J. Mech. B. Fluids.* 2001. V. 20. № 1. P. 127–144.
8. *Miles J.* Stability of inviscid shear flow over a flexible boundary // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 434. P. 371–378.
9. *Бойко А.В., Кулик В.М.* Устойчивость пограничного слоя плоской пластины над монолитными вязкоупругими покрытиями // *Докл. РАН.* 2012. Т. 445. № 3. С. 283–285.
10. *Xu S., Rempfer D., Lumley J.* Turbulence over a compliant surface: numerical simulation and analysis // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 478. P. 11–34.
11. *Luo H., Bewley T.R.* Accurate simulation of near-wall turbulence over a compliant tensegrity fabric // *Proc. SPIE.* 2005. V. 5757. P. 184–197.
12. *Fukagata K., Kern S., Chatelain Ph., Koumoutsakos P., Kasagi N.* Evolutionary optimization of an anisotropic compliant surface for turbulent friction drag reduction // *J. Turbul.* 2008. V. 9. № 35. P. 1–17.

13. *Semenov N.* On conditions of modeling and choice of viscoelastic coatings for drag reduction // Recent Developments in Turbulence Management. Ed. by K.-S. Choi. Dordrecht: Kluwer, 1991. P. 241–262.
14. *Choi K.S., Yang X., Clayton B.R., Glover E.J., Atlar M., Semenov B.N., Kulik V.M.* Turbulent drag reduction using compliant surfaces // Proc. R. Soc. Lond. A. 1997. V. 453. P. 2229–2240.
15. *Kulik V.M., Lee I., Chun H.H.* Wave properties of coating for skin friction reduction // Phys. Fluids. 2008. V. 20, 075109.
16. *Reutov V.P., Rybushkina G.V.* Hydroelastic instability threshold in a turbulent boundary layer over a compliant coating // Phys. Fluids. 1998. V. 10. № 2. P. 417–425.
17. *Reutov V.P., Rybushkina G.V.* Selection of the divergence waves on a model viscoelastic coating under a potential flow // Phys. Fluids. 2008. V. 20, 092108.
18. *Duncan J.H., Waxman A.M., Tulin M.P.* The dynamics of waves at the interface between a viscoelastic coating and a fluid flow // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 177–197.
19. *Yeo K.S., Khoo B.C., Zhao H.Z.* The absolute instability of boundary-layer flow over viscoelastic walls // Theor. Comput. Fluid Dyn. 1996. V. 8. P. 237–252.
20. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981.
21. *Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.* Elastic Waves in Layered Media. N.Y.: McGraw-Hill, 1957.
22. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
23. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
24. *Kulik V.M., Voiko A.V., Seoudi B., Chun H.H., Lee I.* Measurement method of complex viscoelastic material properties // Int. J. Solids Struct. 2010. V. 47. № 3. P. 374–382.
25. *Семенов Б.Н.* Об интерференционной форме воздействия вязкоупругой границы на пристенную турбулентность // Влияние полимерных добавок и упругости поверхности на пристенную турбулентность. Новосибирск: Наука, 1978. С. 57–74.
26. *Schlichting H.* Boundary-Layer Theory. N.Y.: McGraw-Hill, 1955=*Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва
e-mail: vasily@vedeneev.ru

Поступила в редакцию
2.XII.2014