

УДК 533.6.013.42

ФЛАТТЕР БЕСКОНЕЧНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ КОНЕЧНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

© 2017 г. В. О. Бондарев^а, В. В. Веденеев

МГУ им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва
^аe-mail: Bondarev.vsevolod@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.03.2017 г.

Исследуется устойчивость бесконечной упругой пластины в сверхзвуковом потоке газа при наличии пограничного слоя, который образуется на поверхности пластины. Изучено влияние вязких и температурных возмущений пограничного слоя при больших, но конечных числах Рейнольдса на поведение бегущих волн. Показано, что при малой толщине пограничного слоя в зависимости от фазовой скорости распространения возмущений, вязкость может оказывать как стабилизирующий, так и дестабилизирующий эффект.

Ключевые слова: пограничный слой, панельный флаттер, флаттер пластины, гидродинамическая неустойчивость.

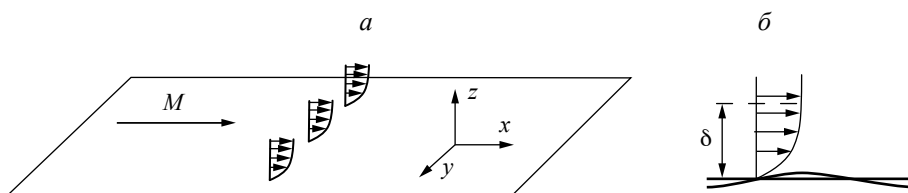
DOI: 10.7868/S056852811706010X

Панельный флаттер — это аэроупругая неустойчивость панелей обшивки летательного аппарата, которая может привести к его разрушению. Ранее было показано, что наряду с известным и изученным флаттером связанного типа [1], который возникает при больших сверхзвуковых скоростях, также может возникать одномодовый флаттер [2], возбуждающийся при трансзвуковых и малых сверхзвуковых скоростях. При этом одномодовый флаттер не может быть обнаружен и исследован с помощью поршневой теории, обычно используемой в сверхзвуковой аэроупругости. Эти результаты были подтверждены численно и экспериментально [3].

Во многих предыдущих работах по панельному флаттеру вязкостью газа пренебрегалось, и течение считалось однородным. Однако, в теоретических [4–10] и экспериментальных исследованиях [11, 12] показано, что при наличии пограничного слоя флаттер может быть ослаблен или полностью подавлен. Этот результат был получен при анализе конкретного профиля пограничного слоя — соответствующему безградиентному турбулентному пограничному слою на плоской пластине. Однако, при движении летательных аппаратов в зависимости от условий обтекания в разных частях поверхности могут образовываться качественно разные профили пограничных слоев.

В статьях [13–15] в приближении невязкого сдвигового слоя аналитически исследовано влияние пограничного слоя произвольного вида на панельный флаттер. Его влияние на связанный флаттер не зависит от профиля пограничного слоя. В то же время, влияние пограничного слоя на одномодовый флаттер в случае длинных волн зависит от типа профиля пограничного слоя, а именно, различно для обобщенно-выпуклого профиля и профиля с обобщенной точкой перегиба. В [16] путем численного решения уравнения Рэлея и дисперсионного уравнения, результаты [13–15] обобщены на произвольные длины волн. Проведено сравнение с аналитическим решением [13, 15], найден диапазон длин волн, при котором эти решения совпадают.

До сих пор исследования влияния пограничного слоя общего вида на флаттер проводились в невязкой постановке (число Рейнольдса $Re = \infty$), и влияние вязких и температурных возмущений пограничного слоя остается открытым вопросом. В настоящей работе исследуются влияния пограничного слоя на поведение бегущих волн упругой пластины с учетом вязкости при больших, но конечных числах Рейнольдса. Известно, что бегущие в безграничной пластине волны в значительной мере определяют границы одномодового флаттера пластин конечных размеров [17]; таким образом, настоящее исследование является первым этапом в изучении влияния вязких возмущений пограничного слоя на флаттер конечных пластин.



Фиг. 1. Безграничная пластина в сверхзвуковом потоке газа (а); пограничный слой на поверхности упругой пластины (б)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Исследуется устойчивость системы: упругая пластина, обтекаемая с одной стороны плоскопараллельным потоком сверхзвукового сжимаемого вязкого газа. Пластина имеет форму безграничной плоскости, на ее поверхности имеется пограничный слой с полем скорости и температуры, которые считаются заданными (фиг. 1). На систему накладываются малые возмущения в виде бегущих волн: пластина имеет прогиб $w(x, t) = e^{i\alpha(x-ct)}$, возмущение параметров потока $\Psi_d(x, z, t) = \Psi(z)e^{i\alpha(x-ct)}$ в декартовой системе координат x, y, z . Таким образом, параметры потока имеют вид $\Psi_t(x, z, t) = \Psi^0(z) + \Psi(z)e^{i\alpha(x-ct)}$, где $\Psi^0(z)$ – функции, описывающие невозмущенное установившееся течение. Задача решается в плоской постановке, рассматриваются возмущения, не зависящие от координаты y . Течение считается ламинарным. Также считается, что при $z > \delta$ течение является однородным, где δ – толщина пограничного слоя.

Сначала рассмотрим результаты предыдущих работ, в которых исследовано невязкое приближение и получены зависимости скорости роста возмущений от толщины пограничного слоя при различных длинах волн.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ НЕВЯЗКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

В работах [13–16] рассматривалось невязкое приближение задачи о влиянии пограничного слоя на флаттер пластины в сверхзвуковом потоке газа, т.е. число Рейнольдса $R = \infty$.

Было доказано, что волны с фазовыми скоростями $Re c > M$ или $Re c < 0$, где M – число Маха, являются нейтральными или затухающими. Следовательно, только волны с фазовыми скоростями $0 < Re c < M$ могут привести к неустойчивости.

Пограничный слой называется обобщенно-выпуклым, если выполнено условие $(u' / T)' > 0$ для $z \in [0; \delta)$, где u, T – профили скорости и температуры невозмущенного течения, δ – толщина пограничного слоя (здесь и далее знак штрих обозначает дифференцирование по координате z). В работах [13,15,16] для такого типа профилей было доказано следующее:

1. Если волна является растущей при $\delta = 0$ (т.е. $0 < Re c < M - 1$), тогда она остается растущей и при $\delta \neq 0$. Однако, скорость роста монотонно уменьшается и стремится к нулю, когда δ увеличивается.

2. Если волна нейтральная при $\delta = 0$ (т.е. $M - 1 < Re c < M$), тогда при $\delta \neq 0$ она начинает расти. Когда δ увеличивается, скорость роста возмущений сначала растет, достигая максимума при некотором $\delta = \delta_m$, а далее уменьшается и стремится монотонно к нулю.

Также исследовано влияние пограничного слоя с одной обобщенной точкой перегиба z_s , где $(u' / T)' = 0$. В дозвуковых течениях такие профили неустойчивы, т.к. существование обобщенной точки перегиба необходимо и достаточно для неустойчивости дозвуковых возмущений в невязком приближении [18]. Однако, в сверхзвуковом потоке существуют такие профили, что обобщенная точка перегиба расположена в сверхзвуковой части пограничного слоя, т.е. в области, где течение является сверхзвуковым по отношению к основному потоку ($u(z_s) < M - 1$). Это означает, что с одной стороны, дозвуковые возмущения затухают, т.к. критерий устойчивости

$$\left(\frac{u'(z)}{T(z)} \right)' < 0, \quad z > z_s, \quad (2.1)$$

где $u(z_s) = M - 1$, выполняется. С другой стороны, сверхзвуковые возмущения тоже могут быть затухающими, так как, критерий устойчивости для них [15] не связан с существованием обобщенной точки перегиба. Следовательно, профили такого типа могут быть устойчивыми и, поэтому, могут существовать в реальных течениях.

Пограничные слои такого типа оказывают следующее влияние на бегущую волну:

1. Если волна растущая при $\delta = 0$ (т.е. $0 < \text{Re } c < M - 1$), тогда она остается растущей и при $0 < \delta < \delta_1$, при этом скорость роста возмущений становится больше, чем в однородном потоке. Для более толстых пограничных слоев, $\delta_1 < \delta < \delta_2$, волна является растущей, но скорость роста возмущений меньше, чем в однородном потоке. Наконец, в толстых пограничных слоях, $\delta > \delta_2$, волна становится затухающей.

2. Если волна является нейтральной при $\delta = 0$ (т.е. $M - 1 < \text{Re } c < M$), то при $\delta \neq 0$ она начинает расти. Поведение таких волн аналогично случаю обобщенно-выпуклых профилей.

3. ВОЗМУЩЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ ВЯЗКОСТИ

3.1. Система уравнений для возмущений

Далее число Рейнольдса считается большим, но конечным.

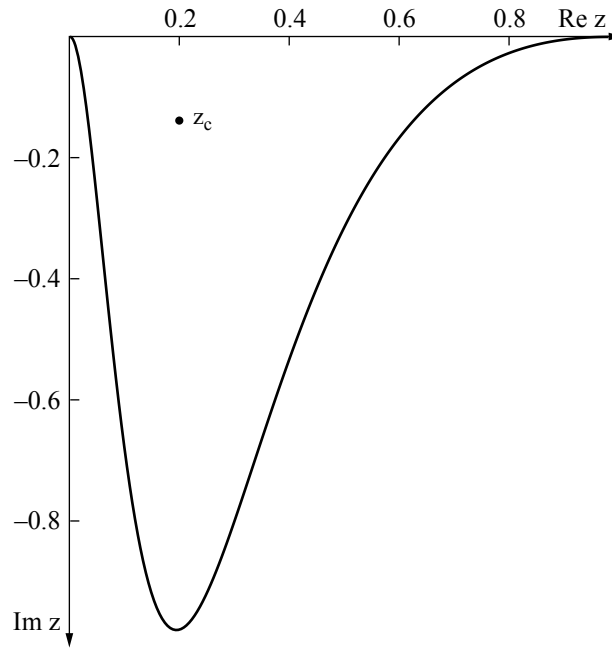
Рассмотрим линеаризованную обезразмеренную систему уравнений газовой динамики для возмущений [18] в виде $\frac{dz_i}{dz} = \sum_{j=1}^6 A_{ij} z_j$, где A_{ij} – известные функции от z , а $z_j, j = 1 \dots 6$, – неизвестные функции, в качестве которых взяты

$$z_1 = f, z_2 = f', z_3 = \varphi, z_4 = \frac{\pi}{M^2}, z_5 = \theta, z_6 = \theta',$$

где f, θ – возмущения горизонтальной компоненты скорости и температуры, обезразмеренные на скорость u_∞^* и температуру T_∞^* , соответственно. Здесь и далее нижний индекс ∞ означает значение во внешнем однородном течении ($z > 1$). Функция φ характеризует возмущение вертикальной компоненты скорости, обезразмеренное на u_∞^* , и связана с ним следующим образом $v_z^* = u_\infty^* \cdot \alpha \cdot \varphi(z) e^{i\alpha(x-ct)}$, где α – волновое число. Координата z обезразмерена на толщину пограничного слоя δ^* . Величина π – возмущение давления, обезразмеренное на $\frac{\rho_\infty^* u_\infty^{*2}}{\gamma M^2}$, где γ – показатель адиабаты. Так как в теории пограничного слоя считается, что давление невозмущенного потока p не зависит от z , в данной работе будет предполагаться, что $p(z) = \text{const}$.

Считается, что массовые силы отсутствуют и возмущение динамической вязкости следующим образом зависит от возмущения температуры $m_1 = \frac{d\mu_{dyn}}{dT} \cdot \theta$, где μ_{dyn} – динамическая вязкость, обезразмеренная на ее значение вдали от пластины. Далее для простоты примем, что значение динамической вязкости постоянно и, соответственно, $m_1 = 0$ (значительно более громоздкими выкладками доказывается, что без данных упрощений можно прийти к таким же результатам, которые будут показаны ниже). Тогда линеаризованная обезразмеренная система уравнений газовой динамики примет вид

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2, \\ z_2' &= \frac{\alpha R}{\nu \rho} \left(\rho(i(u-c)z_1 + u'z_3) + \frac{i}{\gamma} z_4 \right) + O(1) \\ z_3' &= -iz_1 - \frac{\rho'}{\rho} z_3 - i(u-c) \left(\frac{z_4 M^2}{p} - \frac{z_5}{T} \right) \\ z_4' &= \left(1 + \frac{1}{R} O(1) \right)^{-1} \cdot \left(-\gamma \alpha^2 \rho i(u-c) z_3 + \frac{1}{R} O(1) \right) \\ z_5' &= z_6 \\ z_6' &= \frac{\alpha R \text{Pr}}{\gamma \nu \rho} \left(\gamma \rho (T' z_3 + i(u-c) z_5) - i(\gamma-1)(u-c) z_4 M^2 \right) - \\ &\quad - 2 \text{Pr}(\gamma-1) M^2 u'(z_2 + i\alpha^2 z_3) + \alpha^2 z_5, \end{aligned} \tag{3.1}$$



Фиг. 2. Путь интегрирования уравнения Рэлея для профиля скорости $u(z) = M \sin(\pi z/2)$, $M = 1.6$, $c = 0.5 - 0.33i$. Критическая точка $z_c \approx 0.20 - 0.14i$, $\delta = 1$

где ρ – плотность невозмущенного потока, обезразмеренная на ρ_∞^* , ν – кинематическая вязкость газа, обезразмеренная на ν_∞^* . Pr – число Прандтля, $O(1)$ – функции от z_j , имеющие порядок единицы при $R \rightarrow \infty$. Число Рейнольдса определено как $R = u_\infty^* \delta / \nu_\infty^*$.

Общее решение системы (3.1) состоит из комбинации шести линейно независимых решений. При $R \rightarrow \infty$ решения (3.1) приближаются с помощью двух регулярных решений, превращающихся в пределе $R = \infty$ в решения уравнения Рэлея, и четырех решений типа ВКБ [18], имеющих асимптотический вид $z_i(z) = f_i(z) \exp(g_0(z) \sqrt{\alpha R})$.

3.2. Регулярные решения

В случае невязкого приближения ($R = \infty$), используя линеаризованные обезразмеренные уравнения газовой динамики, (3.1), можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на вертикальную компоненту скорости распространения возмущений [18].

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{(u-c)\varphi' - u'\varphi}{T - M^2(u-c)^2} \right) - \frac{\alpha^2}{T} (u-c)\varphi = 0 \quad (3.2)$$

Это уравнение называется уравнением Рэлея. Возмущение давления выражается через возмущение вертикальной компоненты скорости по формуле

$$\pi = -i\gamma M^2 \left(\frac{(u-c)\varphi' - u'\varphi}{T - M^2(u-c)^2} \right). \quad (3.3)$$

Уравнение Рэлея имеет две особенности [18]. Первая особенность, в точке, где $T(z) - M^2(u(z) - c)^2 = 0$ устранима. Вторая особенность, в критической точке z_c , где $u(z_c) = c$, представляет собой особенность логарифмического типа и приводит к сингулярности решения. Эта особенность не может быть устранена в рамках невязкого случая. Так как в точке z_c имеется логарифмическая особенность, то решение, полученное интегрированием по пути, проходящему сверху критической точки в комплексной плоскости, в общем случае не равно решению, полученному интегрированием по пути, проходящему снизу z_c . Решения, являющиеся пределом решений вязкой системы при $R \rightarrow \infty$ получаются тогда, когда интегрирование ведется вдоль контура в комплексной плоскости z с обходом критической точки снизу (правило обхода Линя) [18–20] (фиг. 2).

Следовательно, при решении уравнения Рэлея, интегрирование должно проходить по гладкой кривой, проходящей снизу от критической точки. В частности, в случае $\text{Im}(z_c) > 0$ интегрирование может быть осуществлено по вещественной оси z .

Далее рассматриваются граничные условия для уравнения Рэлея. На поверхности $z = 0$ ставится условие непротекания через колеблющуюся пластину. Второе условие ставится на внешней поверхности пограничного слоя $z = 1$. Так как при $z > 1$ течение является однородным, то уравнение Рэлея (3.2) сводится к уравнению с постоянными коэффициентами и имеет решение $v(z) = Ce^{-\beta z}$, $\beta = \alpha\sqrt{1 - M^2(1 - c)^2}$, причем из условия затухания возмущений при $z \rightarrow +\infty$ должна выбираться такая ветвь корня, что $\text{Re}\beta > 0$ при $\text{Im}\omega \gg 1$. Это экспоненциальное решение вне пограничного слоя должно срачиваться с решением внутри пограничного слоя – это и есть второе граничное условие. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$\varphi = -ic \quad (z = 0), \quad \frac{d\varphi}{dz} + \beta\varphi = 0 \quad (z = 1) \tag{3.4}$$

3.3. ВКБ-решения

Для вычисления первых членов разложения ВКБ-решений по $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\alpha R}}$ представим неизвестные функции z_i в виде

$$z_i = (f_{i0}(z) + f_{i1}(z)\varepsilon + f_{i2}(z)\varepsilon^2 + \dots)\exp\left(\frac{g_0(z)}{\varepsilon}\right)$$

При подстановке z_i в уравнения (3.1) получаются следующие два типа ВКБ-решений. Первое, имеющее вид

$$\begin{aligned} f_{10} &= \text{const}_1 \cdot (u - c)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{i}{v}\right)^{-\frac{1}{4}} \\ f_{30} &= f_{40} = f_{50} = 0 \\ f_{31} &= -i \cdot \text{const}_1 (u - c)^{-\frac{5}{4}} \left(\frac{i}{v}\right)^{-\frac{3}{4}} \\ f_{41} &= 0 \\ g_0 &= \int_{z^*}^z \sqrt{\frac{i}{v}(u - c)} dz \end{aligned} \tag{3.5}$$

назовем вязким решением. Второе,

$$\begin{aligned} f_{10} &= f_{30} = f_{40} = 0 \\ f_{41} &= 0 \\ f_{50} &= \text{const} \cdot T^{\frac{1}{2}} (u - c)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{i \text{Pr}}{v}\right)^{\frac{1}{2}} \\ g_0 &= \int_{z^*}^z \sqrt{\frac{i \text{Pr}}{v}(u - c)} dz, \end{aligned} \tag{3.6}$$

назовем температурным решением.

Вязкое и температурное решения содержат по паре решений, отличающиеся выбором ветви в g_0 .

4. ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПО $(\sqrt{\alpha R})^{-1}$ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

В общем случае, если не рассматривать сначала граничные условия, то решение системы уравнений (3.1) будет состоять из шести частных линейно независимых решений, два из

которых – регулярные решения, два – вязкие решения, два – температурные решения [18]. Чтобы удовлетворить условию затухания на бесконечности, нужно взять соответствующие ветви корней в g_0 в вязком и температурном решениях (другие ветви соответствуют экспоненциально растущим при $z \rightarrow \infty$ решениям, они не удовлетворяют граничному условию затухания). Соответственно, из двух вязких решений и из двух температурных решений остается по одному решению каждого типа. Из двух линейно независимых регулярных решений можно составить линейную комбинацию, удовлетворяющую условию на бесконечности. Тем самым, решение системы уравнений (3.1), удовлетворяющее граничное условие затухания, представляет собой сумму трех линейно независимых решений (регулярного, вязкого и температурного):

$$\begin{aligned} f(z) &= c_1 f_r(z) + c_2 f_v(z) + c_3 f_t(z) \\ \varphi(z) &= c_1 \varphi_r(z) + c_2 \varphi_v(z) + c_3 \varphi_t(z) \\ \theta(z) &= c_1 \theta_r(z) + c_2 \theta_v(z) + c_3 \theta_t(z). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Аналогично для других неизвестных, в том числе и для возмущения давления:

$$\pi(z) = c_1 \pi_r(z) + c_2 \pi_v(z) + c_3 \pi_t(z), \quad (4.2)$$

где индексы r, v, t обозначают регулярное, вязкое и температурное решение, соответственно.

Эти решения представляются следующими разложениями по ε :

$$\begin{aligned} f_r &= f_{inv} + f_r^2 \varepsilon^2 + \dots; \\ f_{v,t} &= (f_{v,t}^0 + f_{v,t}^1 \varepsilon + f_{v,t}^2 \varepsilon^2 + \dots) \exp\left(\frac{g_{0(v,t)}}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где индекс «*inv*» означает невязкое решение при $\varepsilon = 0$, т.е. решение уравнения Рэлея.

В разд. 3.3 получено, что $f_{40} = f_{41} = 0$ как для вязкого, так и для температурного решения. Кроме того, так как π_r – регулярное решение системы (3.1), куда ε входит только в виде ε^2 , то

$$\pi_r(z) = \pi_{inv}(z) + O(\varepsilon^2).$$

Из этого следует, что $\pi(z)$ (4.2) можно переписать в виде

$$\pi(z) = c_1(\varepsilon) \pi_{inv}(z) + O(\varepsilon^2). \quad (4.4)$$

Поэтому для нахождения первого приближения по ε для возмущения давления понадобится вычислить c_1 , так как только эта величина в (4.4) имеет в разложении по ε линейный член.

Для вычисления величины c_1 рассмотрим граничные условия прилипания и теплоизолированности на поверхности колеблющейся пластины (при $z = 0$)

$$\begin{aligned} z_1 &= f = 0 \\ z_3 &= \varphi = -ic \\ z_6 &= \theta' = 0. \end{aligned}$$

Далее, подставляя граничные условия в (4.1), получаем

$$\begin{aligned} c_1 f_r(0) + c_2 f_v(0) + c_3 f_t(0) &= 0 \\ c_1 \varphi_r(0) + c_2 \varphi_v(0) + c_3 \varphi_t(0) &= -ic \\ c_1 \theta'_r(0) + c_2 \theta'_v(0) + c_3 \theta'_t(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для вычисления c_1 использована формула Крамера $c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & f_v & f_t \\ -ic & \varphi_v & \varphi_t \\ 0 & \theta'_v & \theta'_t \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} f_r & f_v & f_t \\ \varphi_r & \varphi_v & \varphi_t \\ \theta'_r & \theta'_v & \theta'_t \end{vmatrix}.$$

Здесь и далее подразумевается, что значения функций берутся при $z = 0$. Далее следует подставить сюда функции скоростей и температуры в виде разложения (4.3). Учтывая, что g_0 для вязкого и температурного случаев уже были найдены (3.5), (3.6), получаем

$$c_1 = \frac{-ic}{\Phi_{inv}} + \frac{-ic}{\Phi_{inv}} \cdot \left(\frac{f_{inv}}{\Phi_{inv}} \cdot \frac{\Phi_v^1}{f_v^0} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (4.6)$$

С помощью системы уравнений для невязкого приближения [18] и выражений для Φ_v^1 , f_v^0 из разд. 3.3 (f_{31} и f_{10} , соответственно), находятся

$$\frac{f_{inv}}{\Phi_{inv}} = i \cdot \frac{-M^2(u-c)u'\Phi_{inv} + \Phi_{inv}'T}{\Phi_{inv}(T - M^2(u-c)^2)}; \quad \frac{\Phi_v^1}{f_v^0} = \frac{-i}{g_0'} = -i \cdot \left(\sqrt{\frac{i}{v}(u-c)} \right)^{-1}.$$

Подставляя данные выражения в формулу (4.6) и используя граничное условие $\Phi_{inv}(0) = -ic$, в итоге c_1 принимает вид

$$c_1 = 1 + \left(\sqrt{\frac{i}{v}(u-c)} \right)^{-1} \cdot \frac{-M^2(u-c)u'\Phi_{inv} + \Phi_{inv}'T}{\Phi_{inv}(T - M^2(u-c)^2)} \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

В результате, применив выражение для возмущения давления из невязкого приближения (3.3), получаем окончательное выражение для возмущения давления

$$\pi(z) = \left[1 + \left(\sqrt{\frac{i}{v}(u-c)} \right)^{-1} \frac{-M^2(u-c)u'\Phi_{inv} + \Phi_{inv}'T}{\Phi_{inv}(T - M^2(u-c)^2)} \varepsilon \right]_{z=0} \cdot \left(-i\gamma M^2 \left[\frac{(u-c)\Phi_{inv}' - u'\Phi_{inv}}{T - M^2(u-c)^2} \right] \right) + O(\varepsilon^2). \quad (4.7)$$

Возникает вопрос выбора ветви корня в (4.7) для случая, когда c – вещественная величина. Ранее было найдено (3.5), что

$$g_0 = \int_{z^*}^z \sqrt{\frac{i}{v}(u-c)} dz$$

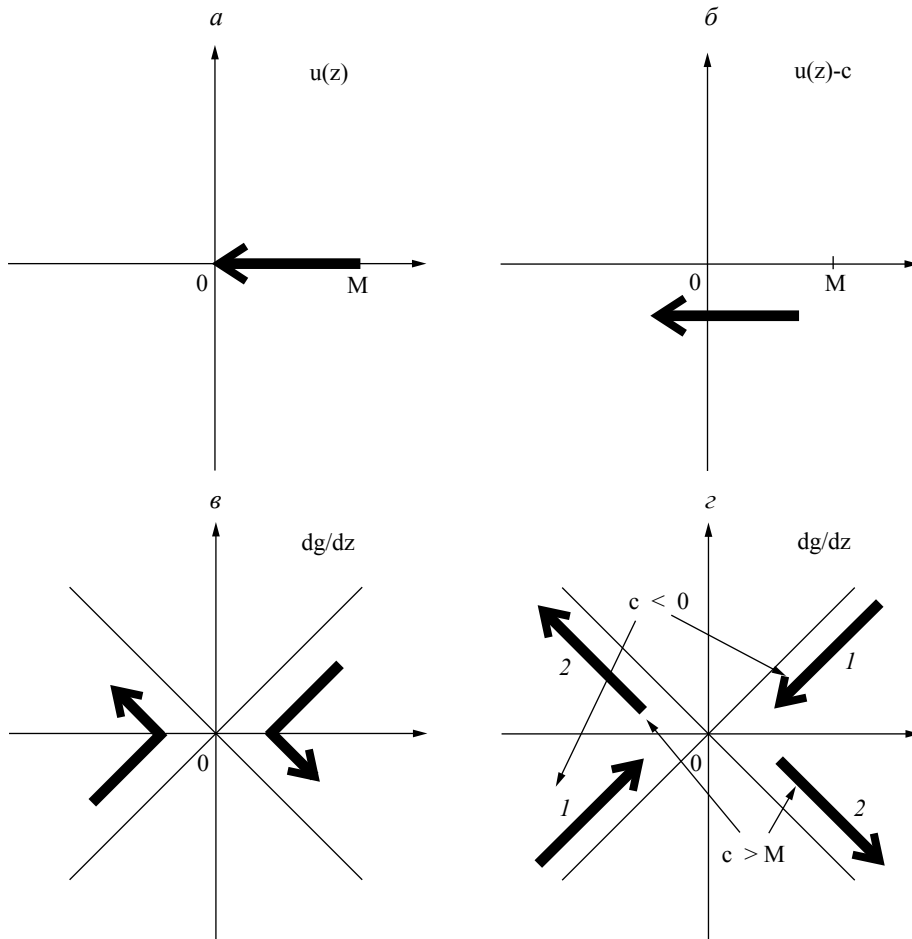
при этом ветвь корня выбирается такой, что выполняется условие затухания на бесконечности: $\text{Re } g_0(z) < 0$ (а следовательно и $\text{Re } g_0'(z) < 0$) при $z \rightarrow \infty$.

Рассмотрим случай $0 < c < M$ и вычислим значение g_0' при $z = 0$. При больших z подкоренное выражение имеет вид iQ , где Q – положительная вещественная величина, следовательно, при больших z нужна ветвь с аргументом $-3\pi/4$. При уменьшении z в точке поворота z_c , где $u(z) - c = 0$, значение подкоренного выражения будет равняться нулю, и корень имеет точку ветвления. Известно, что в окрестности точки поворота ВКБ-решения не верны. Чтобы избежать особенности, представим фазовую скорость как $c = \text{Re}(c) + s \cdot i$, где s – малая положительная величина (для получения физически корректного решения требуется обход точки z_c снизу, см. разд. 3.2). На фиг. 3, а и б в комплексных плоскостях изображены значения функций $u(z)$ и $u(z) - c$, соответственно, стрелками показано изменение функции при уменьшении z от δ до 0. На фиг. 3, в изображены значения двух ветвей $\sqrt{\frac{i}{v}(u-c)}$. Требуется выбрать ветвь, которая находится левее мнимой оси (стрелками показан путь при уменьшении z от δ до нуля). Далее, уменьшая z до нуля, приходим в нужную точку $g_0'(0)$ (фиг. 3, в). Устремляя s к нулю, в данном случае получаем $g_0'(0) = \sqrt{c/v} \cdot e^{\pi i 3/4}$.

Случаи $c < 0, c > M$ рассматриваются аналогично, за исключением того, что теперь нет необходимости добавлять малую величину $s \cdot i$ (фиг. 3, г). Следовательно, получаем

$$g_0'(0) = \sqrt{\frac{c}{v}} \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \quad c < 0; \quad (4.8)$$

$$g_0'(0) = \sqrt{\frac{c}{v}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad c > M.$$



Фиг. 3. Комплексные плоскости $u(z)$ (а); $u(z) - c$ (б); $\sqrt{i(u - c) / \nu}$, при $0 < c < M$ (в); при $c < 0, c > M$ (кривые 1, 2, соответственно) (г)

5. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ БЕЗГРАНИЧНОЙ ПЛАСТИНЫ В ПОТОКЕ ГАЗА

Для определенности рассмотрим случай $c > 0$. Следовательно, согласно предыдущему разделу $g'(0) = \sqrt{c / \nu} \cdot e^{3\pi i / 4}$. Для дальнейшего анализа удобно иначе обезразмерить выражение (4.7). Скорости обезразмерим на скорость звука a_∞^* во внешнем установившемся течении, длины – на толщину пластины, давление – на величину $\rho_{pl}^* a_\infty^{*2}$, где ρ_{pl}^* – плотность пластины. Температура, как и прежде, обезразмерена на значение температуры во внешнем течении. В результате, используя простые алгебраические преобразования, получается выражение

$$\pi(z) = \left[1 + \varepsilon \left| \frac{c}{\nu} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} (M\delta)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{u'(0)}{c} + \frac{T(0)}{\mu c^2} \pi_{inv}(0) \right) \right] \pi_{inv}(z) + O(\varepsilon^2), \tag{5.1}$$

$$\pi_{inv}(z) = -\frac{i\mu}{\alpha} \left[\frac{(u - c)\phi'_{inv} - u'\phi_{inv}}{T - M^2(u - c)^2} \right], \tag{5.2}$$

где μ – отношение плотности основного потока к плотности материала пластины. Число Рейнольдса, входящее в $\varepsilon = 1 / \sqrt{\alpha R}$, берется равным $R = u_\infty^* \delta^* / \nu_\infty^*$, а ν обезразмерено на плотность ν_∞^* потока вне пограничного слоя.

Уравнение движения пластины [21] в безразмерных переменных имеет вид

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - M_w^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_d(x, t, z = 0) = 0, \tag{5.3}$$

где D – жесткость пластины, параметр M_w характеризует ее натяжение, p_d – возмущение давления газа.

Подставляя прогиб пластины в виде бегущей волны $w(x,t) = e^{i(\alpha x - \omega t)}$, $p_d(x,t,z=0) = \pi(0)e^{i(\alpha x - \omega t)}$ в уравнение (5.3), получаем общий вид дисперсионного уравнения

$$F(\alpha, \omega) = D\alpha^4 + M_w^2\alpha^2 - \omega^2 + \pi(0) = 0. \quad (5.4)$$

Далее, подставляя выражение для возмущения давления $\pi(0)$ (5.1) в (5.4), получается явный вид дисперсионного уравнения

$$F(\alpha, \omega) = D\alpha^4 + M_w^2\alpha^2 - \omega^2 + \left[1 + \varepsilon \left| \frac{c}{v} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} (M\delta)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{u'(0)}{c} + \frac{T(0)}{c^2} \Pi_{inv}(0) \right) \right] \Pi_{inv}(0)\mu = 0$$

где для удобства введена

$$\Pi_{inv} = \frac{\pi_{inv}}{\mu} = -\frac{i}{\alpha} \left[\frac{(u-c)\phi'_{inv} - u'\phi_{inv}}{T - M^2(u-c)^2} \right].$$

Решение дисперсионного уравнения $\omega(\alpha)$ можно получить в предположении, что $\mu \ll |\alpha|$ и $\mu \ll |\omega|$, справедливом при одномодовом флаттере [2]. Применяя формулу Тейлора, получаем

$$\omega(\alpha, \mu) = \omega(\alpha, 0) + \mu \left[\frac{\partial \omega}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} + o(\mu) = \omega(\alpha, 0) - \mu \left[\frac{\partial F}{\partial \mu} \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)^{-1} \right]_{\mu=0} + o(\mu) \quad (5.5)$$

отсюда с точностью до малых порядка μ выполняется

$$\omega(\alpha, \mu) = \omega(\alpha, 0) + \frac{1}{2\omega(\alpha, 0)} \left[1 + \varepsilon \left| \frac{c}{v} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} (M\delta)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{u'(0)}{c} + \frac{T(0)}{c^2} \Pi_{inv}(0) \right) \right] \Pi_{inv}(0)\mu \quad (5.6)$$

выражение в квадратных скобках вычисляется при $\mu = 0$.

6. ВЛИЯНИЕ ВЯЗКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ ПРИ МАЛОЙ ТОЛЩИНЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В первую очередь представляет интерес то, при каких условиях вязкий член из (5.6) оказывает дестабилизирующий эффект, и при каких – стабилизирующий. Это зависит от знака мнимой составляющей вязкой части решения (5.6), т. е. от знака мнимой части

$$\left[\left| \frac{c}{v} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} (M\delta)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{u'(0)}{c} + \frac{T(0)}{c^2} \Pi_{inv}(0) \right) \right] \Pi_{inv}(0)\mu. \quad (6.1)$$

В случае малой толщины пограничного слоя это исследование может быть проведено в общем виде. Рассмотрим результат отображения (6.1) при $\delta = 0$ (значения (6.1) при малых $\delta > 0$ будут находиться в малой окрестности значений при $\delta = 0$).

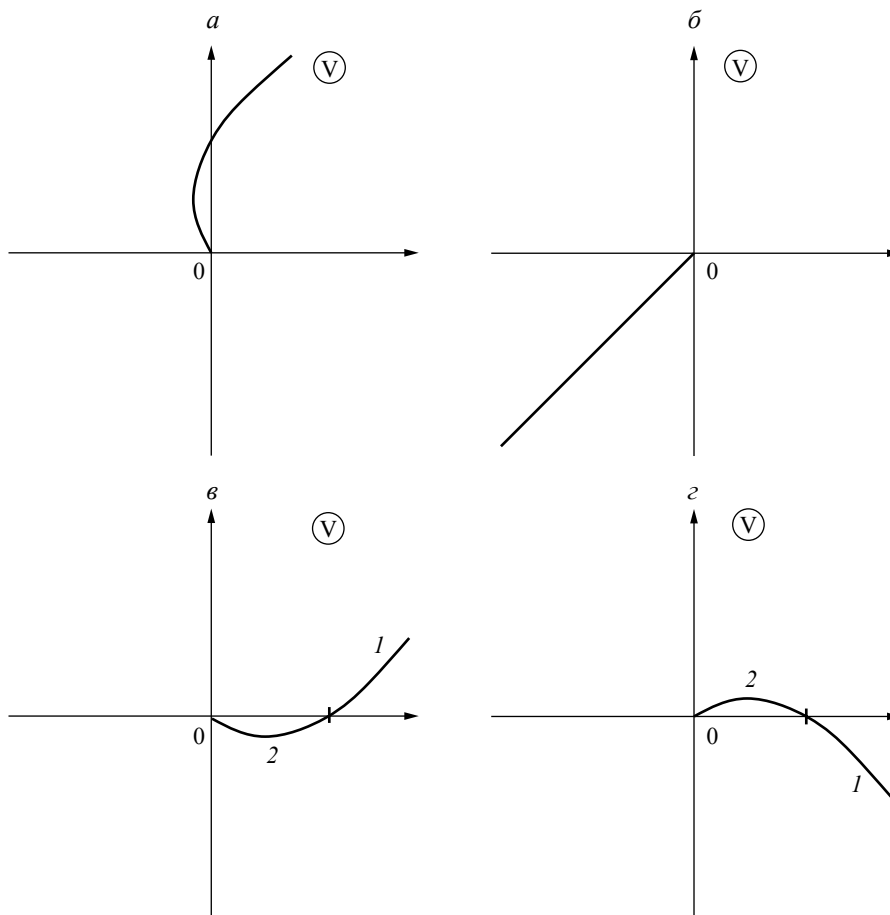
При $\delta = 0$ имеем $\Pi_{inv}(0) = -A^{-1}$ [13], где

$$A = \frac{\sqrt{\alpha^2 - (M\alpha - \omega)^2}}{(M\alpha - \omega)^2} = \frac{\sqrt{1 - (M - c)^2}}{\alpha(M - c)^2}.$$

Значение (6.1) зависит от фазовой скорости c . Сначала положим, что при отсутствии пограничного слоя в однородном потоке возмущение растет, то есть $0 < c < M - 1$, $\text{Im } A = a > 0$, $\text{Re } A = 0$. Следовательно $\Pi_{inv}(0) = a^{-1}i$. Из (6.1) видно, что влияние вязкого члена определяется знаком мнимой части выражения

$$V = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \Pi_{inv}(0)(K \cdot \Pi_{inv}(0) - 1), \quad K = \frac{T(0)}{u'(0)c} > 0. \quad (6.2)$$

Вязкий член оказывает дестабилизирующий эффект при $\text{Im } V > 0$ и стабилизирующий при $\text{Im } V < 0$.



Фиг. 4. Результат отображения $V(6.2)$ в случае $0 < c < M - 1$ (*a*); $M - 1 < c < M + 1$ (*б*); $M + 1 < c < \infty$ при $|K| > |a|$ – кривая 1, при $|K| < |a|$ – кривая 2 (*в*); результат отображения $V(6.3)$ в случае $c < 0$ при $|K| > |a|$ – кривая 1, при $|K| < |a|$ – кривая 2 (*г*)

Результат отображения (6.2) для всевозможных значений a изображен на фиг. 4, *a*. Отсюда видно, что $\text{Im } V > 0$, т.е. вязкий член при малых толщинах пограничного слоя всегда приводит к росту скорости распространения возмущений.

Теперь рассмотрим волны следующего типа: при отсутствии пограничного слоя в однородном потоке волна нейтральная, то есть $M - 1 < c < M + 1$. В этом случае $A \in \mathbb{R}$, причем $A = a > 0$. Результаты отображения (6.2) для различных значений a (фиг. 4, *б*) показывают, что вязкий член оказывает стабилизирующий эффект.

Далее положим, что при отсутствии пограничного слоя в однородном потоке возмущение затухает, то есть $c < 0$ или $c > M + 1$. Сначала рассмотрим случай $c > M + 1$. Тогда A – чисто мнимая величина, причем $\text{Im } A = a < 0$. Результат применения (6.2) показан на фиг. 4, *в*. Он зависит от множителя K : в случае $K < |a|$ при малой толщине пограничного слоя влияние члена порядка ϵ вне зависимости от профиля пограничного слоя оказывает стабилизирующий, в случае $K > |a|$ – дестабилизирующий эффект.

Пусть теперь $c < 0$. В этом случае, как и ранее, A – чисто мнимая величина, $\text{Im } A = a < 0$. Здесь выражение для вязкого коэффициента отличается от всех предыдущих случаев, так как, согласно правилу выбора корня (разд. 4), нужно использовать множитель $e^{3\pi i/4}$ вместо $e^{-3\pi i/4}$. Таким образом, вязкий член принимает следующий вид:

$$V = e^{i\frac{3\pi}{4}} \Pi_{inv}(0)(K \cdot \Pi_{inv}(0) - 1), K < 0. \tag{6.3}$$

В результате применения отображения (6.3) к различным a получается картина, изображенная на фиг. 4, z . При $|K| > |a|$ при малой толщине пограничного слоя (для любого профиля пограничного слоя) влияние члена порядка ϵ оказывает стабилизирующий, при $|K| < |a|$ – дестабилизирующий эффект.

7. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

7.1. Случай длинных волн

В общем случае конечной толщины пограничного слоя уравнение Рэлея не решается аналитически, поэтому вычисление φ_{inv} в (4.7), требует численных методов. В настоящей работе исследуется качественное влияние вязкости, поэтому далее ограничимся длинноволновым приближением, когда уравнение Рэлея решается аналитически [13, 15].

Пренебрегая членом α^2 в уравнении Рэлея, получаем:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{(u-c)\varphi'_{inv} - u'\varphi_{inv}}{T - (u-c)^2} \right) = 0.$$

Общий вид решения этого уравнения имеет вид:

$$\varphi_{inv}(z) = \left[d_1 \left(\int_0^z \frac{T}{(u-c)^2} dz - z \right) + d_2 \right] (u-c),$$

где d_1 и d_2 – константы, а возмущение давления, соответственно, равно

$$\pi_{inv}(z) = -\frac{i\mu d_1}{\alpha}.$$

Константы d_1 и d_2 вычисляются с помощью граничных условий (3.4).

Далее, для определенности, рассмотрим случай вперед бегущей волны, т.е. $c > 0$. Используя (5.1), находим выражение для $\pi(0)$ с точностью до $O(\epsilon^2)$

$$\begin{aligned} \pi(0) = & -\mu \left[\left(\frac{(M\alpha - \omega)^2}{\sqrt{\alpha^2 - (M\alpha - \omega)^2}} \right)^{-1} + \left(\int_0^\delta \frac{Tdz}{(u-c)^2} - \delta \right) \right]^{-1} \\ & \cdot \left[1 - \epsilon \left| \frac{c}{v} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} (M\delta)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{u'}{c} + \frac{T}{c^2} \left(\frac{(M\alpha - \omega)^2}{\sqrt{\alpha^2 - (M\alpha - \omega)^2}} \right)^{-1} + \left(\int_0^\delta \frac{Tdz}{(u-c)^2} - \delta \right) \right] \right]^{-1}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Тогда решение дисперсионного уравнения (5.5) для длинных волн примет вид

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, \mu) = & \omega(\alpha, 0) - \frac{\mu}{2\omega(\alpha, 0)} \cdot \left[\left(\frac{(M\alpha - \omega)^2}{\sqrt{\alpha^2 - (M\alpha - \omega)^2}} \right)^{-1} + \left(\int_0^\delta \frac{Tdz}{(u-c)^2} - \delta \right) \right]^{-1} \\ & \cdot \left[1 - \epsilon \left| \frac{c}{v} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} (M\delta)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{u'}{c} + \frac{T(0)}{c^2} \left(\frac{(M\alpha - \omega)^2}{\sqrt{\alpha^2 - (M\alpha - \omega)^2}} \right)^{-1} + \left(\int_0^\delta \frac{Tdz}{(u-c)^2} - \delta \right) \right] \right]^{-1} \end{aligned} \tag{7.2}$$

выражения во всех скобках вычисляется при $\mu = 0$.

7.2. Исследование усиливающих волн

Далее, аналогично разд. 6, рассматриваются различные диапазоны фазовых скоростей волн. Начнем со случая $0 < c < M - 1$, $\text{Im } A = a > 0$, $\text{Re } A = 0$.

Влияние члена порядка ϵ на скорость роста возмущений исследуется с использованием формулы (7.2)

$$\omega(\alpha, \mu) = \omega(\alpha, 0) - \frac{\mu}{2\omega(\alpha, 0)} \cdot (A + B)^{-1} \cdot \left[1 - \epsilon e^{-i\frac{3\pi}{4}} K_1 [K_2 + K_3(A + B)^{-1}] \right]_{\mu=0}$$

$$B = \delta \left(\int_0^1 \frac{T(\eta) d\eta}{(u(\eta) - c)^2} - 1 \right)$$

$$K_1 = \left| \frac{c}{v} \right|^{-\frac{1}{2}} (M\delta)^{\frac{1}{2}} > 0, \quad K_2 = \frac{u'(0)}{c} > 0, \quad K_3 = \frac{T(0)}{c^2} > 0.$$

Влияние вязкости определяется выражением

$$V = (A + B)^{-1} \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} [1 + K(A + B)^{-1}]_{\mu=0}; \quad K = \frac{K_3}{K_2} = \frac{T(0)}{u'(0) \cdot c} > 0. \quad (7.3)$$

Очевидно, влияние вязкости оказывает дестабилизирующий эффект при $\text{Im} V > 0$ и стабилизирующий при $\text{Im} V < 0$. Обозначая $G = (A + B)^{-1}$, выражение (7.3) переписывается в виде

$$V = G \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} [1 + K \cdot G]_{\mu=0} \quad (7.4)$$

Из данных формул видно, что величина B зависит линейно от толщины пограничного слоя δ , и $B \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

При исследовании члена порядка ϵ интересны области значения выражения (7.3) для различных значений B . Для этого комплексная плоскость B была разделена на несколько областей (фиг. 5, *a*, область $\text{Re}(B) > 0$, $\text{Im}(B) < 0$ не удовлетворяет критерию устойчивости сверхзвуковых течений [13, 15], и не исследовалась), для каждой области были отдельно проанализированы и построены области значения выражения (7.3).

В качестве примера рассмотрим область 1 (фиг. 5, *a*), где дополнительно выполняются следующие ограничения [13, 15]:

1. При наличии пограничного слоя возмущения при $R \rightarrow \infty$ растут быстрее, чем в однородном потоке, то есть $\text{Im}(A + B)^{-1} < \text{Im} A^{-1}$,

2. $\text{Re} B < 0$, что есть необходимое условие устойчивости пограничного слоя на абсолютно жесткой пластине.

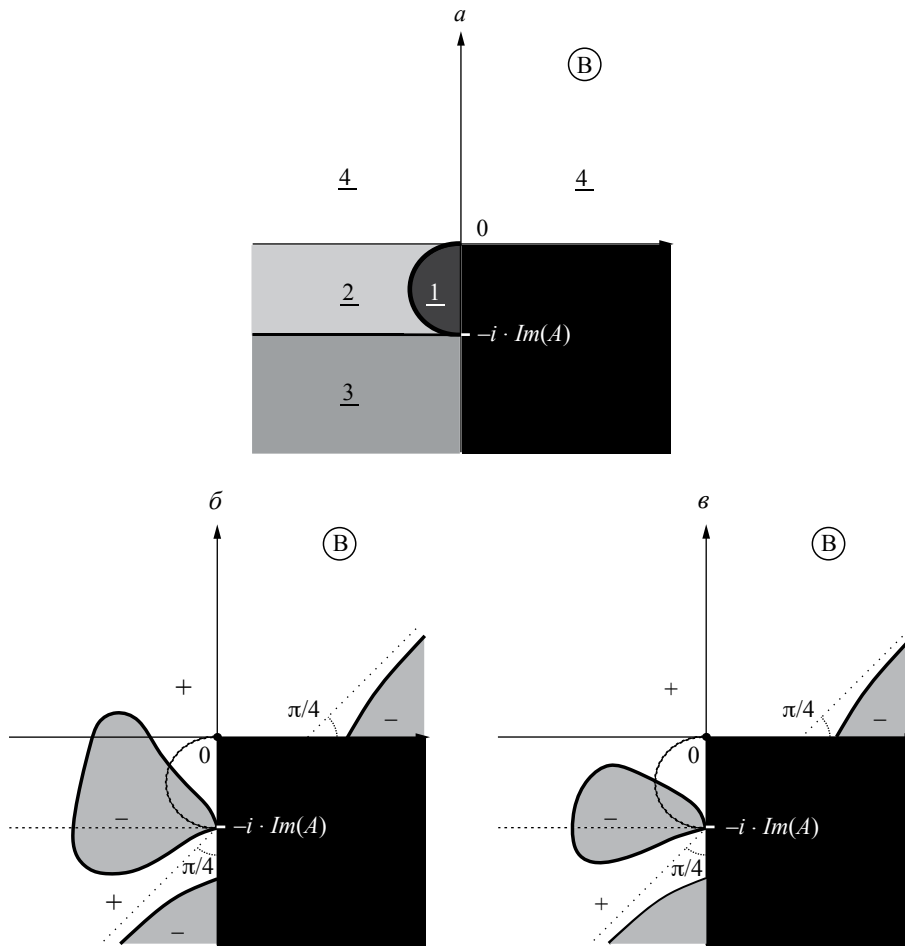
В результате применения (7.3) к данной области B получается область значений члена порядка ϵ , показанная на фиг. 6, *a, б*. Поскольку $\text{Im} V(0) > 0$ в окрестности $B = 0$, то отсюда видно, что при малых δ влияние вязкости всегда влечет за собой увеличение скорости возрастания возмущений, что соответствует результатам разд. 6. При увеличении δ существуют области значений сомножителя порядка ϵ , при которых влияние вязкости оказывает как стабилизирующий (скорость роста возмущений замедляется) так и дестабилизирующий эффект (увеличение скорости роста возмущений).

Представляет интерес, какие значения B попадают в верхнюю полуплоскость $\text{Im} V(B) > 0$ при отображении (7.3). Результат применения (7.3) к различным B показан на фиг. 5, *б, в*, где значения B , которые попадают в верхнюю полуплоскость при отображении $V(B)$ (7.3) обозначены «+», в нижнюю полуплоскость — «-». Результат отображения (7.3) зависит от значения K : в случае $2a \ll K$ получается картина, изображенная на фиг. 5, *б*, в случае $2a \gg K$ — на фиг. 5, *в*. Тем самым, от множителя K зависит попадет ли часть области B , где $\text{Re} B < 0, \text{Im} B > 0$, при отображении (7.3) в нижнюю полуплоскость, или она вся целиком попадет в верхнюю полуплоскость.

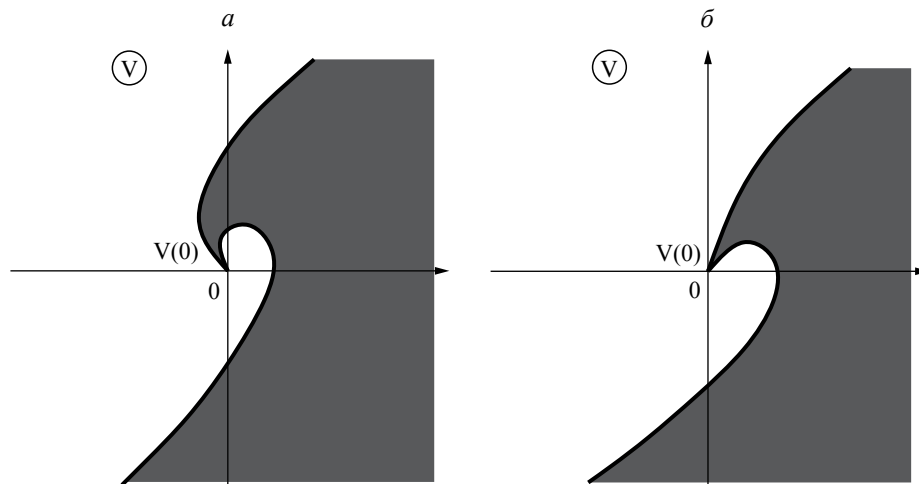
В [13, 15] было показано, что

$$\text{Im} B = -\pi\delta \frac{T^2 (u')'}{u'^3 (T)'}$$

причем значение функций в правой части уравнения берется в критической точке. Таким образом, в случае обобщенно-выпуклых профилей всегда $\text{Im} B > 0$. В случае профилей с обобщенной точкой перегиба знак $\text{Im} B$ зависит от фазовой скорости возмущения c .



Фиг. 5. Комплексная плоскость B , разделенная на области (а); Картина значений B , которые попадают в нижнюю (верхнюю) полуплоскость при отображении $V(B)$ (7.3) обозначены серым (белым) цветом в случае $2a \ll K(\beta)$, $2a \gg K(\beta)$



Фиг. 6. Область значения $V(B)$ (7.3) при отображении области «1» комплексной плоскости B (фиг. 5), в случае $a > K(a)$; $a < K(b)$

Далее для примера вычисляется влияние вязких возмущений для конкретных профилей пограничного слоя: обобщенно-выпуклого и с обобщенной точкой перегиба, соответствующих работе [16]. В обоих примерах принято волновое число $k = 0.005$.

Сначала рассмотрим обобщенно-выпуклый профиль

$$u(z) = M \sin\left(\frac{\pi z}{2\delta}\right) \quad (7.5)$$

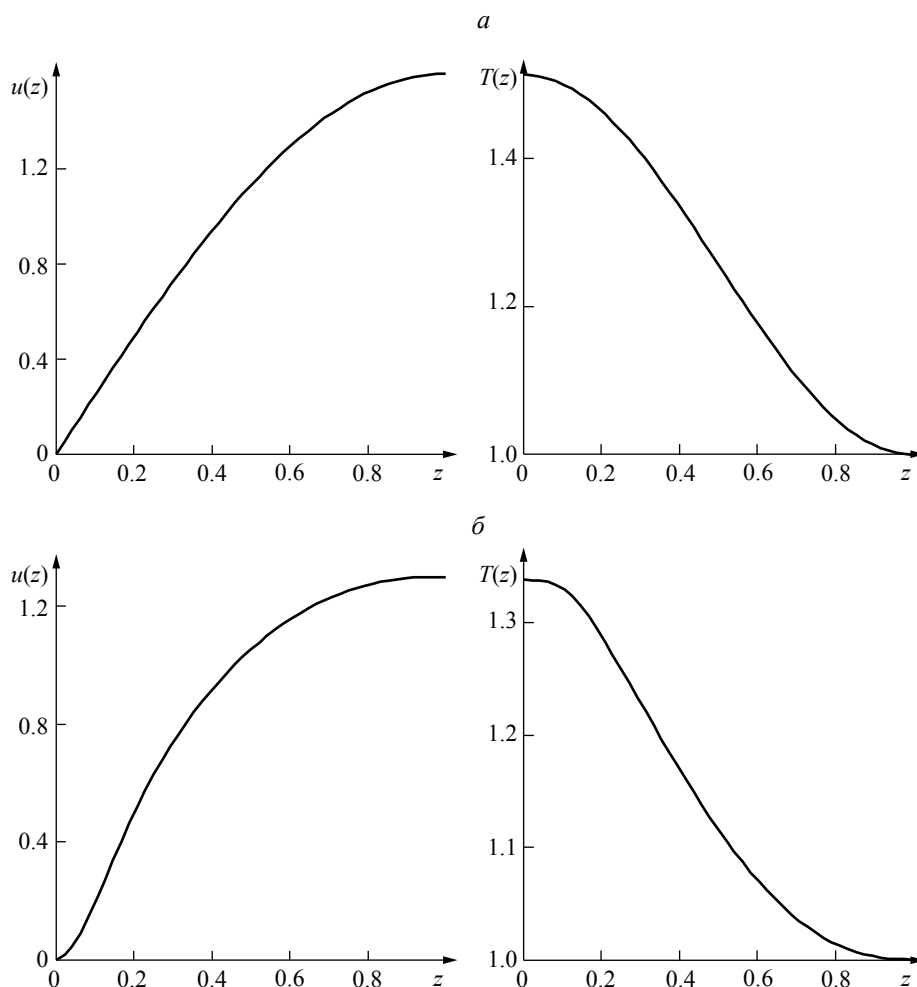
с параметрами $M = 1.6$ и

$$D = 23.9, \quad M_w = 0, \quad \gamma = 1.4. \quad (7.6)$$

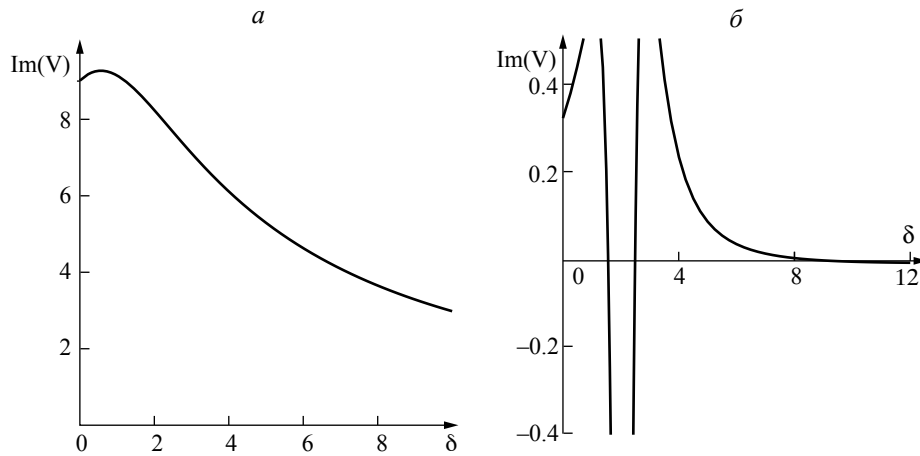
Эти параметры соответствуют стальной пластине в потоке воздуха на высоте 3 км, или алюминиевой пластине на высоте 11 км. Для простоты, здесь и далее будет предполагаться, что число Прандтля $Pr = 1$ и пластина теплоизолирована, следовательно, профиль температуры $T(u)$ выражается тем же выражением, что и при адиабатическом течении [22]

$$T(u) = 1 + \frac{\gamma-1}{2}(M^2 - u^2). \quad (7.7)$$

Профили скорости и температуры (7.5) и (7.7) показаны на фиг. 7, а. Данный пограничный слой устойчив на абсолютно жесткой пластине в невязком приближении [16].



Фиг. 7. Влияние вязких возмущений: обобщенно-выпуклый профиль пограничного слоя (а); профиль с обобщенной точкой перегиба (б)



Фиг. 8. Зависимость мнимой части значения вязкого члена порядка ϵ от толщины пограничного слоя $\text{Im} V(\delta)$ в случае обобщенно-выпуклого профиля (7.5), (7.6), (7.7) (а), профиля с точкой перегиба (7.8), (7.6), (7.7) (б)

В результате получается, что $B = (-25.815 + 0.057i) \cdot \delta$, $a = 98.094$, $K = 24.61$. Значение $\text{Im} V$ выражения (7.3) принимает положительное значение при любых толщинах пограничного слоя, отличных от нуля, причем от 0 до $\delta_1 = 0.57$ оно увеличивается, при $\delta > \delta_1$ оно уменьшается и стремится к нулю при $\delta \rightarrow \infty$ (фиг. 8, а). Данные расчетов соответствуют картине фиг. 5, в в случае $2a \gg K$.

Далее, рассмотрим следующий профиль с обобщенной точкой перегиба

$$u(z) = M \left[1 - \left(1 - \frac{z}{\delta} \right)^{2.4} \right] \times \cos \left[0.7 \left(1 - \frac{z}{\delta} \right)^7 \right] \quad (7.8)$$

с $M = 1.3$ и параметрами (7.6), с профилем температуры (7.7), который показан на фиг. 7, б. Профиль скорости (7.8) представляет собой функцию с одной обобщенной точкой перегиба, расположенной в сверхзвуковой части слоя. Устойчивость данного пограничного слоя в невязком приближении на абсолютно жесткой поверхности показана в [16].

В результате получается, что $B = (-5.712 - 21.249i) \cdot \delta$, $a = 48.033$, $K = 57.29$. Значение $\text{Im} V$ принимает следующий вид (фиг. 8, б): $\text{Im} V > 0$ при $0 < \delta < \delta_{21} = 1.56$, $\text{Im} V < 0$ при $\delta_{21} < \delta < \delta_{22} = 2.49$, $\text{Im} V > 0$ при $\delta_{22} < \delta < \delta_{23} = 8.29$, $\text{Im} V < 0$ при $\delta_{23} < \delta$. Данные расчетов соответствуют картине фиг. 5, б.

7.3. Исследование нейтральных и затухающих волн.

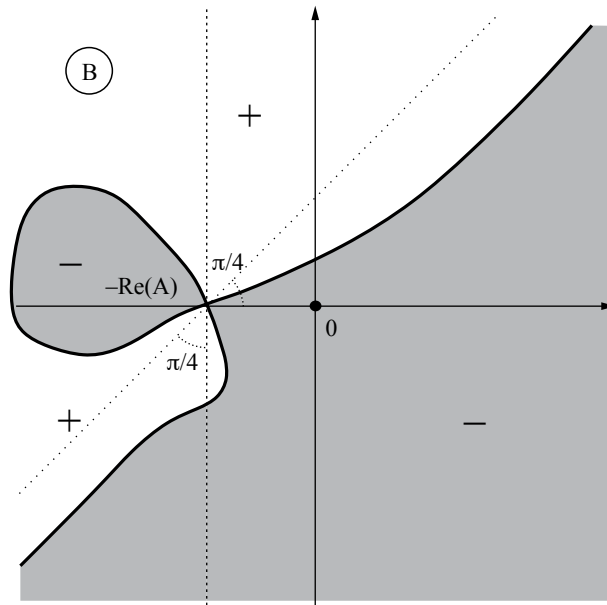
Волны, которые нейтральны в однородном потоке, соответствуют $M - 1 < c < M + 1$. Сначала изучим волны с фазовыми скоростями из промежутка $M - 1 < c < M$. В этом случае, как и в разд. 7.2, B – комплексная величина, линейно зависящая от δ , но $A \in \mathbb{R}$, причем $A = a > 0$.

Аналогично разд. 7.2, для исследования влияния члена порядка ϵ построены области значения выражения $V(B)$ (7.3) для различных B . Результат показан на фиг. 9, где области величин B , для которых $\text{Im} V(B)$ положительно и отрицательно, обозначены «+» и «-», соответственно.

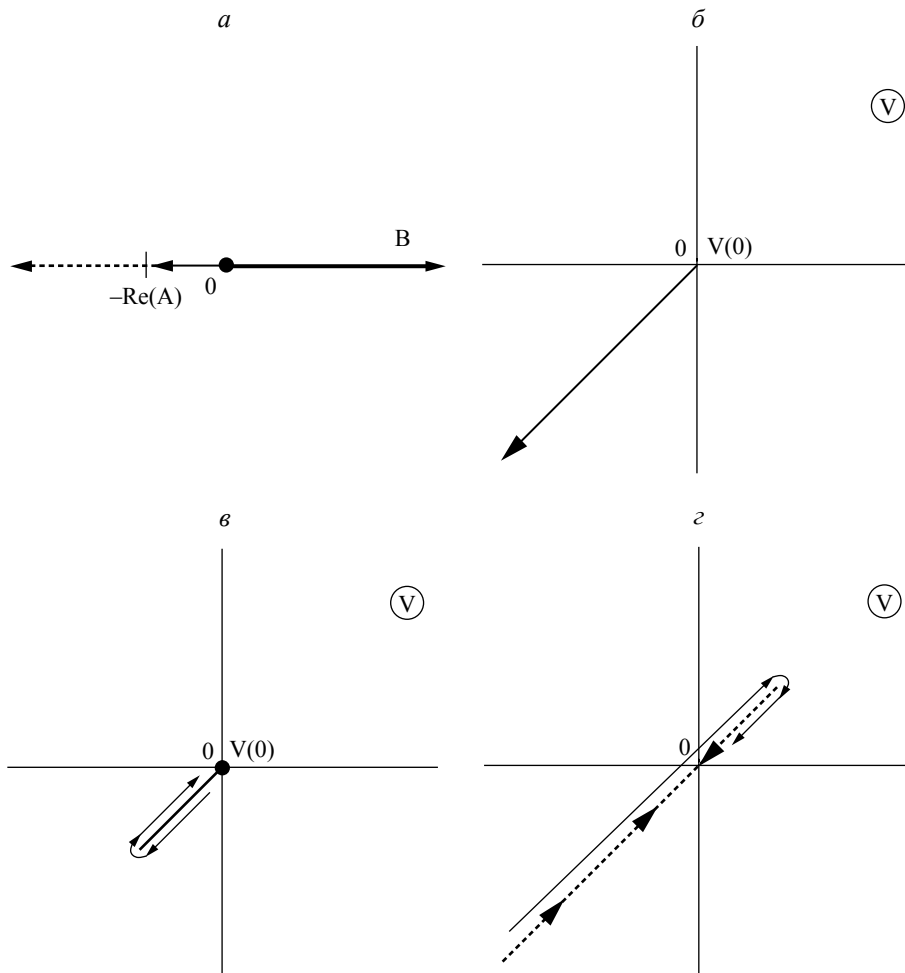
Отсюда видно, что при малых δ учет вязкости влечет за собой уменьшение скорости роста возмущений, что соответствует разд. 6. При увеличении δ существуют области значений B , в которых влияние вязкости оказывает как стабилизирующий, так и дестабилизирующий эффект.

Предположим теперь, что $M < c < M + 1$. В этом случае A – вещественная величина, $A = a > 0$, B – тоже вещественная величина, так как критическая точка z_c , где $u(z_c) = c$, отсутствует. Следовательно, область значений B – вся вещественная ось. В результате применения отображения (7.3) к всевозможным для данного случая значениям B (фиг. 10, а) получается картина, изображенная на фиг. 10, б-г.

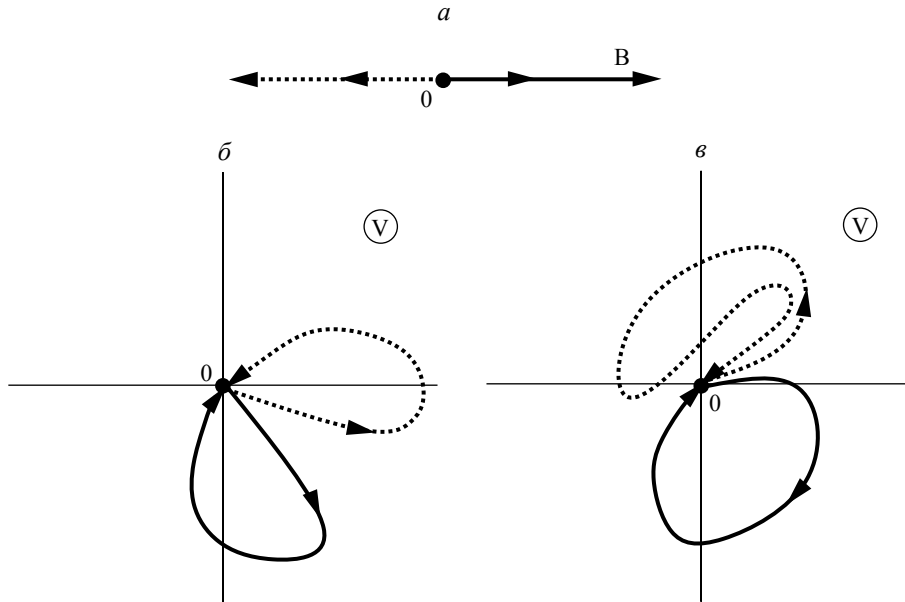
Результаты показывают, что при малых толщинах пограничного слоя вязкий член оказывает стабилизирующий эффект, тогда как при больших эффект может быть противоположным.



Фиг. 9. Картина значений B , которые попадают в нижнюю (верхнюю) полуплоскость при отображении $V(B)$ (7.3) обозначены серым (белым) цветом



Фиг. 10. Вещественная прямая B в случае $M < c < M + 1$, разделенная на части (а); результаты отображения $V(B)$ для различных частей вещественной прямой B (б)–(г)



Фиг. 11. Вещественная прямая B в случае $M + 1 < c < \infty$, разделенная на части (а); Область значения $V(B)$ (7.3) в случаях $K < |a|$ (б); $K > |a|$ (в)

Наконец, рассмотрим волны, которые при отсутствии пограничного слоя в однородном потоке затухают, то есть $c < 0$ или $c > M + 1$. Сначала рассмотрим случай $c > M + 1$. Тогда B – вещественная величина, а A – чисто мнимая величина, причем $\text{Im } A = a < 0$.

Результат применения (7.3) к различным B показан на фиг. 11, а-в. Видно, что результат зависит от множителя K : в случае $K < |a|$ при малой толщине пограничного слоя влияние члена порядка ϵ вне зависимости от профиля пограничного слоя оказывает стабилизирующий, в случае $K > |a|$ – дестабилизирующий эффект. При увеличении толщины пограничного слоя, в зависимости от значения B , учет вязкости может привести как стабилизации, так и дестабилизации системы.

Пусть теперь $c < 0$. В этом случае, как и ранее, B – вещественная величина, A – чисто мнимая величина, $\text{Im } A = a < 0$. Здесь выражение для вязкого коэффициента отличается от всех предыдущих случаев, так как, согласно разд. 4, в (7.3) нужно использовать множитель $e^{3\pi i/4}$ вместо $e^{-3\pi i/4}$. Таким образом, вязкий коэффициент принимает вид

$$V = (A + B)^{-1} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} \left[1 + K(A + B)^{-1} \right]_{\mu=0}, \tag{7.9}$$

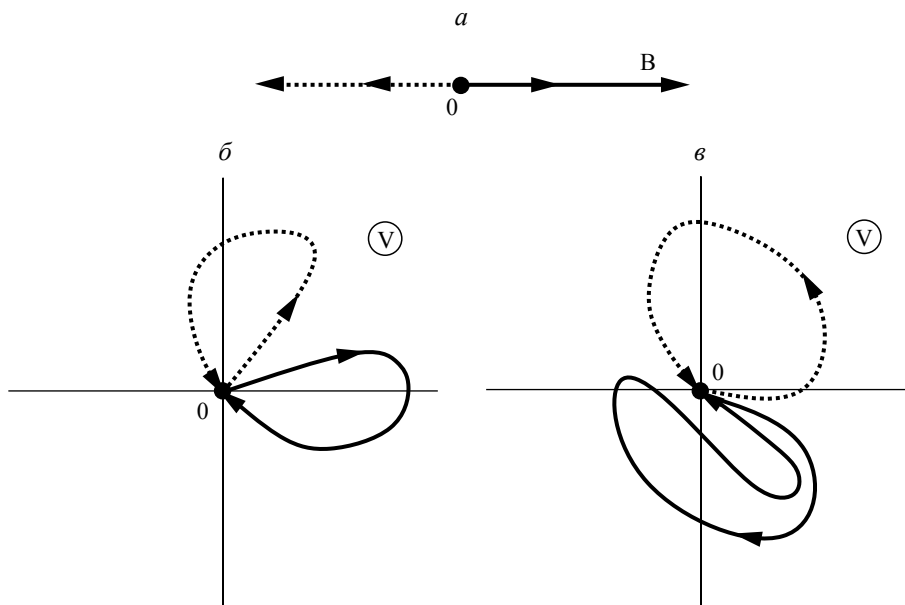
причем коэффициент K стал отрицательным.

В результате применения отображения (7.9) к вещественной прямой B получается картина, изображенная на фиг. 12. В случае $|K| > |a|$ при малых δ (для любого профиля пограничного слоя) влияние члена порядка ϵ оказывает стабилизирующий, в случае $|K| < |a|$ – дестабилизирующий эффект. При больших δ существуют значения B при которых вязкий член оказывает как стабилизирующее, так и дестабилизирующее воздействие.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При больших, но конечных числах Рейнольдса исследовано влияние вязких и температурных возмущений пограничного слоя, образующегося на поверхности пластины, на поведение бегущих волн пластины, находящейся в потоке газа.

Выведено дисперсионное уравнение, описывающее рост возмущений в первом приближении по $(\sqrt{\alpha R})^{-1}$. В общем виде исследовано влияние вязкости при малой толщине пограничного слоя. Показано, что влияние конечности числа Рейнольдса при малой толщине пограничного слоя может оказывать как дестабилизирующий, так и стабилизирующий эффект в зависимости от значения фазовой скорости распространения возмущения.



Фиг. 12. Вещественная прямая B в случае $c < 0$, разделенная на части (а); области значения $V(B)$ (7.9) в случаях $K < |a|$ (б); $K > |a|$ (в)

При произвольной толщине пограничного слоя аналитически исследован случай длинных волн для возможных значений фазовых скоростей. Для длинных усиливающихся в однородном потоке волн рассмотрены примеры обобщенно-выпуклого пограничного профиля и профиля с точкой перегиба, рассчитаны диапазоны толщин пограничных слоев, при которых вязкий член оказывает стабилизирующий и дестабилизирующий эффекты.

Работа поддержана грантом МК-5514.2016.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
2. Веденеев В.В. Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 155–169.
3. Веденеев В.В., Гувернюк С.В., Зубков А.Ф., Колотников М.Е. Экспериментальное исследование одномодового панельного флаттера в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 2. С. 161–175.
4. Miles J.W. On panel flutter in the presence of a boundary layer // J. Aero/space Sciences. 1959. V. 26. № 2. P. 81–93.
5. Dowell E.H. Generalized aerodynamic forces on a flexible plate undergoing transient motion in a shear flow with an application to panel flutter // AIAA J. 1971. V. 9. № 5. P. 834–841.
6. Dowell E.H. Aerodynamic boundary layer effect on flutter and damping of plates // J. Aircraft. 1973. V. 10. P. 734–738.
7. Hashimoto A., Aoyama T., Nakamura Y. Effect of turbulent boundary layer on panel flutter // AIAA J. 2009. V. 47. P. 2785–2791.
8. Visbal M. Viscous and inviscid interactions of an oblique shock with a flexible panel // J. Fluids Struct. 2014. V. 48. P. 27–45.
9. Alder M. Development and validation of a fluid–structure solver for transonic: panel flutter // AIAA J. 2015. V. 53 P. 3509–3521.
10. Alder M. Nonlinear dynamics of pre-stressed panels in low supersonic turbulent flow // AIAA J. 2016. V. 54. P. 1–15.
11. Gaspers P.A., Muhlstein L., Petroff D.N. Further results on the influence of the turbulent boundary layer on panel flutter // NASA TN D-579S. 1970.

12. *Muhlstein L., Gaspers P.A., Riddle D.W.* An experimental study of the influence of the turbulent boundary layer on panel flutter // NASA TN D-4486. 1968. 52 p.
13. *Веденеев В.В.* Одномодовый флаттер пластины с учетом пограничного слоя // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 3. С. 147–160.
14. *Веденеев В.В.* Связанный флаттер упругой пластины в потоке газа с пограничным слоем // Тр. МИАН. 2013. Т. 281. С. 149–161.
15. *Vedeneev V.V.* Interaction of panel flutter with inviscid boundary layer instability in supersonic flow // J. Fluid Mech. 2013. V. 736. P. 216–249.
16. *Bondarev V.O., Vedeneev V.V.* Short-wave instability of elastic plates in supersonic flow in the presence of the boundary layer // J. Fluid Mech. 2016. V. 302. P. 528–552.
17. *Веденеев В.В.* О применении асимптотического метода глобальной неустойчивости в задачах аэроупругости // Тр. МИАН. 2016. Т. 295. С. 292–320.
18. *Lees L., Lin C.C.* Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid // NASA TN-1115. 1946. 85 p.
19. *Drazin P.G. Reid W.H.* Hydrodynamic Stability. Cambridge Univ. Press., 1981. 605 p.
20. *Линь Цзя-Цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 195 с.
21. *Вольмир А.С.* Гибкие пластины и оболочки. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. 419 с.
22. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.