

# Устойчивость упругой трубки, содержащей текущую неньютоновскую жидкость и имеющей локально ослабленный участок<sup>1</sup>

В. В. Веденеев<sup>2</sup>, А. Б. Порошина<sup>3</sup>

Поступило 15 сентября 2017 г.

Работа посвящена исследованию устойчивости течения неньютоновской степенной жидкости в упругой трубке. Интегрированием уравнений движения по сечению получено одномерное уравнение, описывающее длинноволновые низкочастотные движения системы и учитывающее реологию текущей жидкости. В первой части работы найдены критерий устойчивости безграничной однородной трубки и критерий абсолютной неустойчивости. Показано, что неустойчивость, при которой сохраняется осесимметричность движения трубки, возможна лишь при показателе степенного закона  $n < 0.611$ , а абсолютная неустойчивость — при  $n < 1/3$ ; таким образом, потеря устойчивости линейно-вязких сред с сохранением осесимметричности движения невозможна, что согласуется с известными результатами. Во второй части работы методом ВКБ исследована устойчивость трубки, жесткость которой медленно меняется в пространстве так, что имеется “ослабленный” участок конечной длины, в котором система “жидкость–трубка” локально неустойчива. Доказано, что трубка глобально неустойчива, если локальная неустойчивость абсолютная; в противном случае локальная неустойчивость подавляется окружающими локально устойчивыми участками. Численным решением задачи на собственные значения показана высокая точность полученного методом ВКБ результата даже для достаточно быстрого изменения жесткости вдоль оси трубки.

DOI: 10.1134/S037196851801003X

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что потеря устойчивости и вибрации стенок сосудов в организме человека и животных (кровеносных сосудов, желчных протоков, мочеточников и др.) играют важную роль в биологии. В одних случаях такие вибрации могут вызывать преждевременное старение стенок сосудов, в других они существенны в регулировании расхода биожидкости и перепада давления [34, 32]. По этой причине флаттер эластичных трубок, содержащих текущую внутри жидкость, интенсивно исследуется в течение нескольких десятилетий [31, 15, 17].

Изгибная неустойчивость упругих трубок с протекающей внутри жидкостью теоретически и экспериментально исследована во многих работах [30, 14]. Такая неустойчивость может возникать в различных промышленных охладителях, включая охладители ядерных реакторов. Однако нет данных об изгибной неустойчивости в биологических приложениях; по-видимому, изгибные колебания быстро затухают из-за воздействия тканей, окружающих сосуды. Поэтому для биомеханики в первую очередь представляют интерес неустойчивые режимы, не сопровождающиеся изгибом оси трубки.

<sup>1</sup>Исследование В.В. Веденеева выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005) в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук. Им написаны разделы 1, 4. Разделы 2, 3 написаны А.Б. Порошиной.

<sup>2</sup>Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.  
E-mail: vasily@vedeneev.ru

<sup>3</sup>Институт механики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.  
E-mail: poroshina\_ab@mail.ru

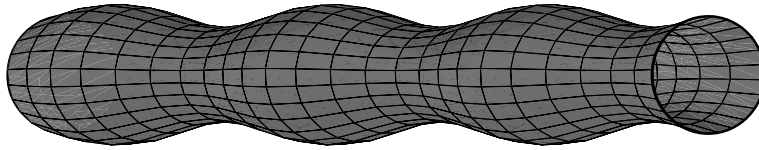


Рис. 1. Осесимметричное возмущение упругой трубки

В литературе опубликованы многочисленные экспериментальные данные по изучению таких неустойчивостей на установках, выполненных по схеме “резистор Старлинга” [5, 6]. Наблюдаемые колебания всегда связаны со схлопыванием трубки: трансмуральное давление (разница внутреннего и внешнего давлений) в неустойчивом состоянии всегда отрицательно по крайней мере вдоль части трубки. В начале цикла колебаний, которому соответствуют высокая скорость потока и отрицательное трансмуральное давление, трубка частично сужается, что увеличивает ее сопротивление. Это приводит к замедлению потока и увеличению трансмурального давления. В свою очередь, это приводит к раздуванию трубки, увеличению расхода и уменьшению трансмурального давления, что завершает цикл колебаний. Во время каждого схлопывания трубки она изменяет свою геометрическую форму и теряет осесимметричность, а поток внутри является довольно сложным и, как правило, отрывным.

Простейшими теоретическими моделями, применяемыми для анализа упругих трубок, являются одномерные модели, впервые использованные в [20]. Для учета пережатия (схлопывания) каждую трубку характеризуют связью площади поперечного сечения и трансмурального давления, известной как закон трубки. Чтобы одномерные модели лучше соответствовали реальному поведению жидкости в трубках, в них включают потери давления, вызванные частичным отрывом потока от стенок после области сужения, что, как показано в [19, 18], играет важную роль. Значительное развитие одномерных моделей, которое приводит к результатам, качественно согласованным с трехмерным численным моделированием, представлено в [38]. В рамках моделей более высокой размерности проводятся аналитические и численные исследования движений жидкости и трубки на основе двумерных моделей [26, 25, 23] и численные исследования, основанные на трехмерных моделях [27, 16]. Однако до сих пор одномерные модели являются основным инструментом моделирования в гемодинамике [1, 11, 35, 33, 8, 37, 3].

Отметим, что ранее в литературе исследовалось протекание только ньютоновских жидкостей в упругих трубках. Известно, однако, что кровь в небольших сосудах [29, 21, 13, 2, 12] и желчь [10, 22] могут проявлять существенно неньютоновские свойства. Например, в [36] приведены параметры крови сердечного цикла, которые эквивалентны  $n = 1/8$  в степенном реологическом законе. В связи с этим возникает вопрос о возможности других видов потери устойчивости, не имеющих места при течении ньютоновской жидкости в трубке.

С целью исследования влияния реологии в настоящей работе изучается флаттер упругих трубок с протекающей внутри степенной жидкостью, основанный на одномерной модели. В работе рассматриваются осесимметричные возмущения трубки (рис. 1), т.е. трансмуральное давление предполагается положительным. Показано, что, хотя такие возмущения в случае ньютоновской жидкости затухают (что соответствует имеющимся экспериментальным данным), они могут расти в случае малого значения показателя степенной среды  $n$ . Это означает, что для псевдопластических жидкостей неустойчивость может наблюдаться для положительных трансмуральных давлений, т.е. без схлопывания трубки во время цикла колебаний. Также изучен характер неустойчивости (абсолютная/конвективная). Методом ВКБ исследована задача об устойчивости безграничной неоднородной трубки, локально устойчивой везде, кроме “ослабленного” участка, где имеется локальная неустойчивость. Показано, что для неустойчивости трубки в целом локальная неустойчивость в ослабленном участке должна быть абсолютной.

## 2. ВЫВОД ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ

**2.1. Трехмерные уравнения движения неньютоновской жидкости.** Рассматривается цилиндрическая упругая трубка с текущей внутри нее неньютоновской степенной жидкостью.

Система уравнений движения жидкости имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{dv^i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla^i p + \frac{1}{\rho} \nabla_j \tau^{ij}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $\tau^{ij}$  — тензор вязких напряжений. Реология степенной жидкости описывается соотношением

$$\tau^{ij} = 2\mu(\sqrt{2}I_2(e))^{n-1} e^{ij}, \quad I_2(e) = \sqrt{e^{ij}e_{ij}}, \quad (2.1)$$

где  $e^{ij}$  — тензор скорости деформаций. Это соотношение обобщает простое выражение для чистого сдвига

$$\tau^{12} = \mu \left( \frac{dv_1}{dx_2} \right)^n.$$

Для ньютоновской жидкости  $n = 1$ . Случай  $0 < n < 1$  соответствует псевдопластическим средам, вязкость которых выше при меньшей скорости сдвига, а случай  $n > 1$  соответствует дилатантной среде, вязкость которой увеличивается с увеличением скорости сдвига (рис. 2, а).

Введем цилиндрическую систему координат, ось  $z$  которой совпадает с осью симметрии трубки, и рассмотрим осесимметричные течения. Тогда система уравнений переписывается в следующем виде:

$$\frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{\partial v^z}{\partial z} + \frac{v^r}{r} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{dv^r}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2}{\rho} \frac{2^{n-1}}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( 2\mu I_2^{n-1} \frac{\partial v^r}{\partial r} \right) - 2r\mu I_2^{n-1} \frac{1}{r^3} v^r + \frac{2}{r} \mu I_2^{n-1} \frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \right) \right], \quad (2.3)$$

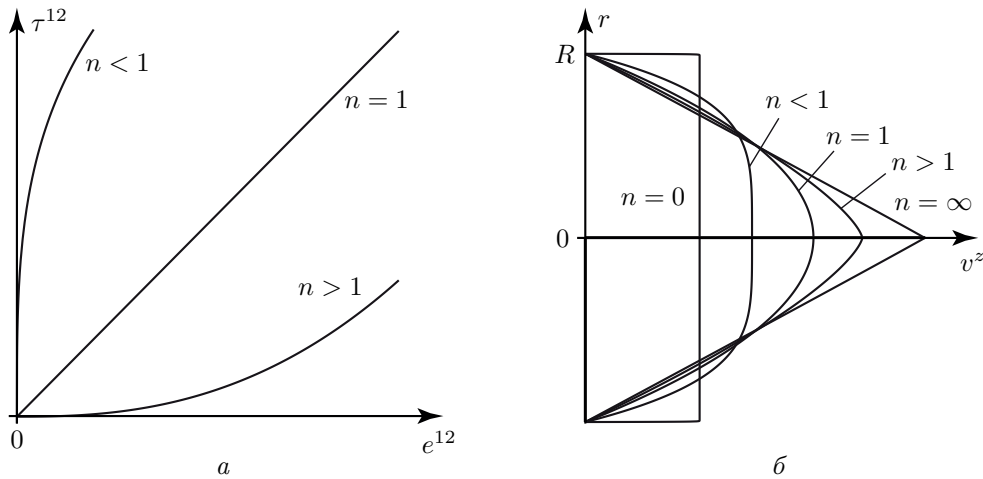
$$\frac{dv^z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2}{\rho} \frac{2^{n-1}}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \right) + \frac{\mu}{r} I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu I_2^{n-1} \frac{\partial v^z}{\partial z} \right) \right]. \quad (2.4)$$

Для стационарного течения внутри жесткой цилиндрической трубки постоянного радиуса  $R_0$  решением системы (2.2)–(2.4) является пуазейлевский профиль скорости

$$v^r = 0, \quad v^z(r) = 2^{-\frac{1}{n}} \left( \frac{k}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left( R_0^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -k = \text{const}. \quad (2.5)$$

Профили скорости для различных  $n$  представлены на рис. 2, б. Для ньютоновской жидкости ( $n = 1$ ) получается стандартный параболический профиль скорости.

**2.2. Предположения.** Будем считать, что деформирование трубки происходит так, что каждое поперечное сечение  $S(z, t)$  оболочки остается круговым, а точки оболочки перемещаются только радиально (рис. 1). Тогда положение оболочки задается радиусом сечения трубки  $R(z, t)$  в точке  $z$  в момент времени  $t$ . Взаимодействие между средой и трубкой происходит за



**Рис. 2.** Степенной закон (2.1) для чистого сдвига (а). Профиль скорости для течения Пуазейля (б)

счет условия прилипания и равенства нормальных напряжений. Продольными перемещениями пренебрегаем. Чтобы упростить двумерную систему (2.2)–(2.4) до одномерной системы уравнений в терминах радиуса поперечного сечения  $R$  и расхода  $Q$ , каждое уравнение интегрируем по сечению, принимая во внимание взаимодействие жидкости с трубой.

Предполагается, что возмущения

- 1) имеют длину волны, много большую радиуса  $R$ ;
- 2) имеют низкую частоту колебаний, так что течение можно считать квазиустановившимся.

При этих условиях относительная скорость  $V(\xi, z, t) = v^z(r, z, t)/v_{av}(z, t)$  (где  $\xi = r/R$  и  $v_{av}(z, t) = Q/(\pi R^2)$  — средняя скорость) не зависит от радиуса поперечного сечения  $R(z, t)$  и локального расхода  $Q(z, t)$ .

Вычисляя среднюю скорость для профиля (2.5), находим

$$V(\xi, z, t) = \frac{1 + 3n}{1 + n} \left( 1 - \xi^{\frac{n+1}{n}} \right).$$

Следовательно,

$$v^z(r, z, t) = \frac{Q(z, t)}{\pi R^2(z, t)} \frac{1 + 3n}{1 + n} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right). \tag{2.6}$$

**2.3. Осреднение системы уравнений по сечению.** Первое уравнение одномерной задачи получается интегрированием уравнения неразрывности (2.2) по поперечному сечению:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \pi \frac{\partial R^2(z, t)}{\partial t} = 0. \tag{2.7}$$

Для получения второго одномерного уравнения проинтегрируем уравнение (2.4), которое примет вид

$$\int_{S(z,t)} \left( \frac{\partial v^z}{\partial t} + v^r \frac{\partial v^z}{\partial r} + v^z \frac{\partial v^z}{\partial z} \right) dS = - \int_{S(z,t)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dS +$$

$$+ \frac{2}{\rho} \int_{S(z,t)} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \right) + \frac{\mu}{r} I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu I_2^{n-1} \frac{\partial v^z}{\partial z} \right) \right] dS.$$

Далее преобразуем его следующим образом.

Во-первых, используя уравнение неразрывности  $\partial v^z / \partial z = -(1/r) \partial(rv^r) / \partial r$  и условие прилипания  $v^z(R, z, t) = 0$  на стенках трубки, с помощью интегрирования по частям находим

$$\int_{S(z,t)} v^r \frac{\partial v^z}{\partial r} dS = 2\pi \int_0^R rv^r \frac{\partial v^z}{\partial r} dr = -2\pi \int_0^R v^z \left( -r \frac{\partial v^z}{\partial z} \right) dr = \int_{S(z,t)} v^z \frac{\partial v^z}{\partial z} dS.$$

Используя профиль скорости (2.6), после ряда преобразований получаем

$$\int_{S(z,t)} v^z \frac{\partial v^z}{\partial z} dS = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(3n+1)Q(z,t)^2}{(2n+1)\pi R(z,t)^2} \right).$$

Во-вторых, член, содержащий давление, переписываем следующим образом:

$$\int_{S(z,t)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dS = \frac{\pi R(z,t)^2}{\rho} \frac{\partial P(z,t)}{\partial z},$$

где

$$P(z,t) = \frac{1}{\pi R^2(z,t)} \int_{S(z,t)} p(r,z,t) dS$$

— среднее давление в поперечном сечении.

Наконец, вязкие члены в правой части преобразуем следующим образом. Два первых члена имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi}{\rho} \int_0^R r \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \right) + \frac{1}{r} \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \right) dr = \\ = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi}{\rho} \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \right) dr = \\ = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi R(z,t)}{\rho} \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) (R(z,t), z, t). \end{aligned}$$

Для следующих преобразований необходимо учесть длинноволновое приближение, т.е. то, что характерное отношение радиуса к длине  $R/L$  является малым параметром  $\varepsilon$ . Из уравнения неразрывности следует, что радиальная и продольная скорости оцениваются как  $v^r/v^z \sim R/L \sim \varepsilon$ . Тогда

$$\mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) = \mu \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} \right)^2 + O(\varepsilon^2) \right)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) = -\mu 2^{\frac{1-n}{2}} \left| \frac{\partial v^z}{\partial r} \right|^n + O(\varepsilon^2).$$

Из выражения для скорости (2.6) находим

$$\frac{\partial v^z}{\partial r}(r, z, t) = -\frac{Q}{\pi R^2(z,t)} \frac{3n+1}{n} \frac{r^{\frac{1}{n}}}{R(z,t)^{\frac{n+1}{n}}}.$$

Тогда

$$\frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi R(z,t)}{\rho} \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{\mu}{\rho} \frac{2(3n+1)^n Q^n r}{n^n \pi^{n-1} R(z,t)^{3n}} \Big|_{r=R} = -\frac{\mu}{\rho} \frac{2(3n+1)^n Q^n}{n^n \pi^{n-1} R(z,t)^{3n-1}}.$$

Последний вязкий член

$$\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\rho} \int_S \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu I_2^{n-1} \frac{\partial v^z}{\partial z} \right) dS$$

имеет порядок  $\varepsilon^2$ , и им можно пренебречь.

В итоге проинтегрированное по сечению уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(3n+1)Q(z, t)^2}{(2n+1)\pi R(z, t)^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{2(3n+1)^n Q(z, t)^n}{n^n \pi^{n-1} R(z, t)^{3n-1}} + \frac{\pi R(z, t)^2}{\rho} \frac{\partial P(z, t)}{\partial z} = 0. \quad (2.8)$$

**2.4. Модель трубки.** Для получения последнего уравнения необходимо связать давление жидкости и движение стенки трубки. Для простоты будем пренебрегать массой трубки и ее натяжением и учитывать только силу упругости, возникающую за счет изменения ее радиуса:

$$\beta(R - R_0) = P, \quad (2.9)$$

где

$$\beta = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R_0^2}$$

— радиальная жесткость трубки,  $R_0$  — радиус недеформированной трубки,  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $h$  — толщина стенки трубки.

**2.5. Одномерная система уравнений.** Таким образом, замкнутая система уравнений (2.7)–(2.9) для трех неизвестных  $Q$ ,  $R$ ,  $P$  относительно переменных  $z$ ,  $t$  имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial(\pi R^2)}{\partial t} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(3n+1)Q^2}{(2n+1)\pi R^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{2(3n+1)^n Q^n}{n^n \pi^{n-1} R^{3n-1}} + \frac{\pi R^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (2.11)$$

$$\beta(R - R_0) = P. \quad (2.12)$$

Впервые эта система в несколько других обозначениях была получена в работе [39].

**2.6. Сравнение с другими одномерными моделями.** Уравнение (2.10) имеет стандартный вид одномерного уравнения неразрывности [15]. Уравнение движения трубки (2.12) также имеет стандартную форму, но, в отличие от других исследований, здесь не учитывается “закон трубки” при отрицательных трансмуральных давлениях: он необходим для получения колебаний, связанных со схлопыванием части трубки, однако целью данной работы является исследование колебаний при положительных трансмуральных давлениях, не сопровождающихся схлопыванием.

Уравнение импульсов (2.11) имеет более сложный вид и нуждается в дополнительном анализе. Как правило [15], одномерное уравнение импульсов записывается в стандартной форме

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{dp}{dz} - F, \quad (2.13)$$

где  $v(z, t)$  и  $p(z, t)$  — средние продольная скорость и давление жидкости и  $F$  — слагаемое, учитывающее потери на трение. Умножив уравнение (2.11) на  $\rho/(\pi R^2)$ , можно его переписать в аналогичной форме

$$\rho \left( \frac{1}{\pi R^2} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{\pi R^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(3n+1)Q^2}{(2n+1)\pi R^2} \right) \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu \frac{2(3n+1)^n Q^n}{n^n \pi^n R^{3n+1}}. \quad (2.14)$$

Левая часть уравнения (2.13) записывается в предположении о равномерном распределении скоростей, т.е. в пренебрежении пуазейлевским распределением скоростей. Это эквивалентно случаю  $n = 0$ , поскольку в данной ситуации получается однородный профиль скорости (рис. 2, б). Для  $n = 0$ , вводя среднюю скорость  $v = Q(z, t)/(\pi R^2)$  и используя уравнение неразрывности, левую часть уравнения (2.14) преобразуем к виду

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

который совпадает с левой частью (2.13). Очевидно, что для  $n \neq 0$  левая часть уравнения (2.14) отражает влияние пуазейлевского распределения скоростей на интегральную конвективную производную. В аналогичном виде правая часть уравнения импульсов при  $n \neq 0$  используется в [36, 11].

Наконец, рассмотрим слагаемое, учитывающее вязкие потери давления:

$$\mu \frac{2(3n+1)^n Q^n}{n^n \pi^n R^{3n+1}}. \quad (2.15)$$

Для  $n = 1$  оно примет вид

$$\mu \frac{8Q}{\pi R^4}, \quad (2.16)$$

что представляет собой потерю давления в обычном потоке ньютоновской жидкости с пуазейлевским распределением скоростей. В этом виде слагаемое  $F$  было взято, например, в работе [20]. Ясно, что при  $n \neq 1$  выражение (2.15) представляет собой обобщение члена, отвечающего за вязкие потери, на степенные жидкости.

Аналогичная одномерная модель использовалась в [36, 11] для создания модели сети кровеносных сосудов. Однако, учитывая профиль скорости (2.5) и получая тот же конвективный член, что и второе слагаемое в (2.11), авторы данных исследований принимали вязкие потери давления равными выражению (2.16), т.е. пренебрегали неньютоновской реологией.

**2.7. Переход к безразмерным переменным.** В качестве размерно независимых величин выбираются плотность жидкости  $\rho$ , радиус трубки  $R_0$  и расход  $Q_0$  на входе в трубку. Тогда остальные величины обезразмериваются следующим образом:

$$R = R_0 \tilde{R}, \quad Q = Q_0 \tilde{Q}, \quad P = \frac{\rho_0 Q_0^2}{R_0^4} \tilde{P}, \quad \beta = \frac{\rho_0 Q_0^2}{R_0^5} \tilde{\beta}, \quad z = R_0 \tilde{z}, \quad t = \frac{R_0^3}{Q_0} \tilde{t},$$

где обозначения с тильдой относятся к безразмерным переменным.

Вязкость жидкости обезразмеривается через число Рейнольдса, которое для степенных жидкостей в трубках вводится, как в [28]:

$$\text{Re} = \frac{\rho (2R_0)^n v_{\text{av}}^{2-n}}{8^{n-1} \mu \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^n} = \frac{\rho R_0^n v_{\text{av}}^{2-n}}{\mu} \frac{8n^n}{(3n+1)^n}.$$

Выражая среднюю скорость как  $v_{\text{av}} = Q_0/(\pi R_0^2)$ , получаем

$$\mu = \frac{\rho Q_0^{2-n}}{R_0^{4-3n}} \frac{\pi^{n-2}}{\text{Re}} \frac{8n^n}{(3n+1)^n}.$$

В результате система (2.10)–(2.12) принимает следующий безразмерный вид:

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial(\pi \tilde{R}^2)}{\partial \tilde{t}} = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{(3n+1)\tilde{Q}^2}{(2n+1)\pi \tilde{R}^2} \right) + \frac{16\tilde{Q}^n}{\pi \operatorname{Re} \tilde{R}^{3n-1}} + \pi \tilde{R}^2 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (2.18)$$

$$\tilde{\beta}(\tilde{R} - 1) = \tilde{P}. \quad (2.19)$$

Подставив значение  $P$ , выраженное через  $R$ , из (2.19) в (2.18) и опустив тильды, окончательно получим безразмерную систему двух одномерных по пространству уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial(\pi R^2)}{\partial t} = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(3n+1)Q^2}{(2n+1)\pi R^2} \right) + \frac{16Q^n}{\pi \operatorname{Re} R^{3n-1}} + \pi R^2 \beta \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \quad (2.21)$$

### 3. ЛОКАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСТОЙЧИВОСТИ

**3.1. Уравнения для возмущений.** Пусть имеется стационарное состояние с расходом  $Q = 1$  и радиусом трубки  $R = R_s(z)$ . Возмущения стационарного состояния имеют вид

$$Q = 1 + Q'(z, t), \quad R = R_s(z) + R'(z, t).$$

Подставим эти выражения в систему (2.20), (2.21) и линеаризуем ее. После ряда алгебраических преобразований линеаризованная система уравнений для возмущений принимает вид

$$\frac{\partial Q'(z, t)}{\partial z} + 2\pi R_s \frac{\partial R'(z, t)}{\partial t} = 0, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q'(z, t)}{\partial t} + \frac{2(3n+1)}{(2n+1)\pi R_s(z)^2} \frac{\partial Q'(z, t)}{\partial z} + \left[ \frac{16n}{\pi \operatorname{Re} R_s^{3n-1}(z)} - \frac{4(3n+1)}{(2n+1)\pi R_s^3(z)} \frac{\partial R_s(z)}{\partial z} \right] Q'(z, t) + \\ + \left[ \left( 2\pi \beta R_s(z) + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi R_s^4} \right) \frac{\partial R_s(z)}{\partial z} + \frac{16(1-3n)}{\pi \operatorname{Re} R_s^{3n}(z)} \right] R'(z, t) + \\ + \left[ \pi \beta R_s^2(z) - \frac{2(3n+1)}{\pi(2n+1)R_s^3(z)} \right] \frac{\partial R'(z, t)}{\partial z} = 0. \quad (3.2) \end{aligned}$$

**3.2. Дисперсионное уравнение.** Сначала изучим локальную устойчивость трубки. Предположим, что  $\lambda \ll L$ , где  $\lambda$  — длина волны, т.е. будем рассматривать волны, длина которых значительно меньше расстояния, на котором радиус трубки существенно изменяется, что позволяет положить  $R_s = \operatorname{const}$ . Тогда уравнение (3.2) становится уравнением с постоянными коэффициентами и допускает решения в виде бегущих волн. С другой стороны, уравнение (3.2) выведено при условии  $\lambda \gg R$ , так что оба неравенства

$$R \ll \lambda \ll L \quad (3.3)$$

считаются выполненными.

Принимая локальное значение  $R_s$  в качестве линейного масштаба  $R_0$  и переобезразмеривая остальные переменные, без ограничения общности будем считать, что  $R_s \equiv 1$ , и рассматривать решения в виде бегущих волн  $Q' = \hat{Q}e^{i(kz-\omega t)}$ ,  $R' = \hat{R}e^{i(kz-\omega t)}$ . Уравнение (3.1) примет вид

$$\hat{Q}k e^{i(kz-\omega t)} + 2\pi(-\omega)\hat{R}e^{i(kz-\omega t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{R} = \frac{\hat{Q}k}{2\pi\omega}.$$



Уравнение (3.2) преобразуется к виду

$$-\widehat{Q}\omega e^{i(kz-\omega t)} + \frac{2(3n+1)}{(2n+1)\pi} ki\widehat{Q}e^{i(kz-\omega t)} + \frac{16n}{\pi \operatorname{Re}} \widehat{Q}e^{i(kz-\omega t)} + \frac{16(1-3n)}{\pi \operatorname{Re}} \widehat{R}e^{i(kz-\omega t)} + \left(\pi\beta - \frac{2(3n+1)}{\pi(2n+1)}\right) \widehat{R}kie^{i(kz-\omega t)} = 0.$$

Подставляя сюда выражение для  $\widehat{R}$  и деля на  $\widehat{Q}e^{i(kz-\omega t)}$ , получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 + \left(\frac{16n}{\pi \operatorname{Re}} i - \frac{2(3n+1)k}{\pi(2n+1)}\right) \omega + \frac{8(1-3n)k}{\pi^2 \operatorname{Re}} i - \frac{k^2\beta}{2} + \frac{k^2(3n+1)}{\pi^2(2n+1)} = 0. \quad (3.4)$$

Так как это квадратное уравнение относительно  $\omega$ , его дискриминант задается формулой

$$D = -\frac{(16n)^2}{\pi^2 \operatorname{Re}^2} + 2k^2\beta - \frac{32(n+1)k}{\pi^2 \operatorname{Re}(2n+1)} i + \frac{4(3n+1)nk^2}{(2n+1)^2\pi^2} \quad (3.5)$$

и корни находятся в виде

$$\omega_{1,2}(k) = \frac{2}{2 + mk^2} \left[ \frac{(3n+1)k}{(2n+1)\pi} - \frac{8n}{\pi \operatorname{Re}} i \pm \frac{1}{2} \sqrt{D} \right]. \quad (3.6)$$

Из (3.6) видно, что одна ветвь  $\omega$  всегда имеет отрицательную мнимую часть. Таким образом, одна из волн для каждого  $k$  всегда затухает и только одна может расти и приводить к неустойчивости.

**3.3. Критерий устойчивости.** Волна является растущей, если  $\operatorname{Im} \omega(k) > 0$ . Выражение для  $\operatorname{Im} \omega(k)$  находится из (3.6), где корень вычисляется явно с использованием формулы  $\sqrt{a+ib} = \alpha + i\gamma$ , где

$$\gamma = \pm \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

Вычисления дают

$$\operatorname{Im} \omega = -\frac{8n}{\pi \operatorname{Re}} \pm \frac{16k(n+1)}{\sqrt{2}\pi^2 \operatorname{Re}(2n+1)} \left[ 2k^2 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right) - \frac{(16n)^2}{\pi^2 \operatorname{Re}^2} + \left\{ \frac{32^2 k^2 (n+1)^2}{\pi^4 \operatorname{Re}^2 (2n+1)^2} + 4k^4 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right)^2 - 4k^2 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right) \frac{(16n)^2}{\pi^2 \operatorname{Re}^2} + \frac{(16n)^4}{\pi^4 \operatorname{Re}^4} \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

Исключая квадратные корни возведением в квадрат, мы сводим неравенство  $\operatorname{Im} \omega > 0$  к

$$\frac{8(n+1)^2}{\pi^2(2n+1)^2 n^2} \left( \frac{-(6n^3 - n^2 - 1)}{2n^2\pi^2(2n+1)} - \beta \right) k^4 > 0.$$

Отсюда видно, во-первых, что изменение знака  $\operatorname{Im} \omega(k)$  невозможно при ненулевом  $k$ , так что все волны либо затухают, либо растут. Во-вторых, критерий неустойчивости  $\operatorname{Im} \omega > 0$  сводится к следующему неравенству:

$$\beta < \beta_{\text{н}}(n) = \frac{-(6n^3 - n^2 - 1)}{2n^2\pi^2(2n+1)}. \quad (3.8)$$

Поскольку  $\beta > 0$ , неустойчивость может возникнуть только в том случае, когда правая часть положительна. Это имеет место при

$$n < 0.611.$$

Область неустойчивости  $\beta < \beta_{\text{н}}(n)$  показана на рис. 3.

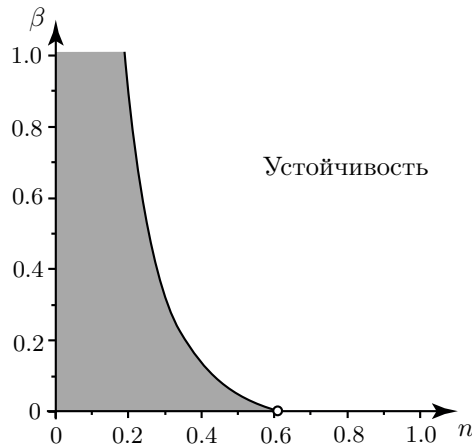


Рис. 3. Область неустойчивости

Заметим, что критерий неустойчивости не зависит от числа Рейнольдса  $Re$ , которое определяет скорости роста волн, но не их знак. Также видно, что осесимметричная неустойчивость возможна только для псевдопластических жидкостей; в частности, режимы неустойчивости течений ньютоновских жидкостей в упругих трубках могут быть только неосесимметричными, что подтверждается всеми известными экспериментальными данными.

**3.4. Абсолютная и конвективная неустойчивость.** Даже если трубка с протекающей внутри псевдопластической жидкостью неустойчива, эта неустойчивость может не наблюдаться в реальности в случае, когда неустойчивость конвективна. В этом случае локализованные возмущения растут, но одновременно сносятся потоком вниз по течению и могут покидать заданную область, имея небольшую амплитуду. Если же неустойчивость абсолютна, локализованные возмущения растут так, что занятая ими область расширяется как вниз, так и вверх по течению. Критерий абсолютной неустойчивости приведен в [7, 4] и состоит из двух условий:

- 1) существует седловая точка  $\omega_s$  функции  $\omega(k)$  в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $\omega$ , т.е.  $d\omega/dk = 0$  при  $\omega = \omega_s$ ,  $\text{Im } \omega_s > 0$ ;
- 2) в этой седловой точке обратная функция  $k(\omega)$  имеет точку ветвления. Сливающиеся в ней ветви  $k_1(\omega_s) = k_2(\omega_s)$  должны соответствовать волнам, бегущим в противоположные стороны, т.е.  $\text{Im } k_1(\omega) \rightarrow +\infty$ ,  $\text{Im } k_2(\omega) \rightarrow -\infty$  при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$  или наоборот.

Для корректности задачи о поведении локализованных возмущений необходимо, чтобы короткие волны затухали, т.е.  $\text{Im } \omega(k) < 0$  при  $k \rightarrow \pm\infty$  вдоль вещественной оси  $k$ . Можно показать, что добиться выполнения этого условия можно путем учета слабой инерции трубки. Будем считать, что масса трубки мала, поэтому соответствующие члены необходимы только для стабилизации коротких волн, а в анализе точки ветвления ими можно пренебречь.

Для получения критерия абсолютной неустойчивости удобно переписать левую часть дисперсионного соотношения (3.4) как многочлен от  $k$ :

$$\left( \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} - \frac{\beta}{2} \right) k^2 + \left( \frac{8(1-3n)}{\pi^2 Re} i - \frac{2(3n+1)}{\pi(2n+1)} \omega \right) k + \left( \omega^2 + \frac{16n}{\pi Re} i \omega \right) = 0. \quad (3.9)$$

Это квадратное уравнение для  $k(\omega)$ , и, следовательно, существуют две пространственные ветви. Точки ветвления  $\omega_s$  функции  $k(\omega)$  находятся из условия равенства дискриминанта нулю.

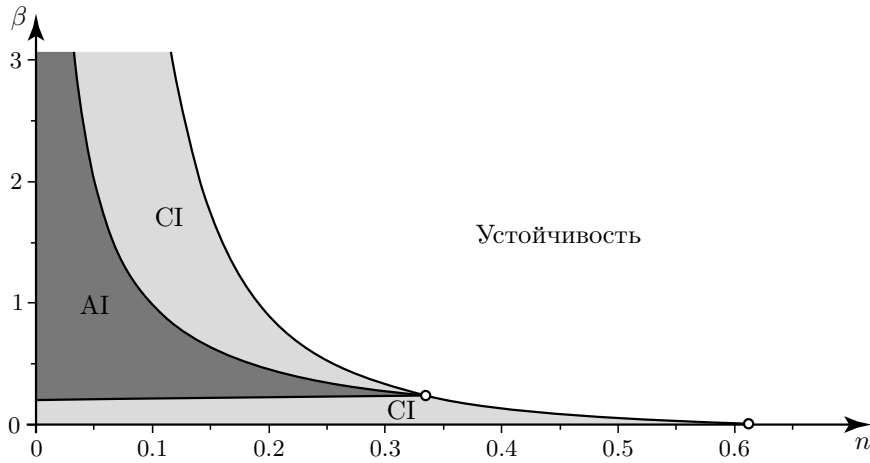


Рис. 4. Области абсолютной (AI) и конвективной (CI) неустойчивости

Простыми преобразованиями снова получаем квадратное уравнение для  $\omega_s$ :

$$D_k = 4 \left( \frac{(3n+1)^2}{\pi^2(2n+1)^2} - \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} + \frac{\beta}{2} \right) \omega^2 - 4 \left( \frac{8(3n+1)(1-3n)}{\pi^3 \text{Re}(2n+1)} + \left( \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} - \frac{\beta}{2} \right) \frac{16n}{\pi \text{Re}} \right) i\omega - \frac{8^2(1-3n)^2}{\pi^4 \text{Re}^2} = 0. \quad (3.10)$$

С помощью уравнения (3.10) легко показать, что условие  $\text{Im} \omega_s > 0$  выполняется тогда и только тогда, когда выражение в скобках при втором слагаемом положительно, т.е.

$$\frac{(3n+1)(1-3n)}{2n(2n+1)} + \frac{3n+1}{2n+1} - \frac{\pi^2 \beta}{2} > 0.$$

Последнее неравенство может быть записано в виде

$$\beta < \beta_{\text{abs}} = \frac{(3n+1)(1-n)}{\pi^2 n(2n+1)}. \quad (3.11)$$

Условие (3.11) показывает, что седловая точка  $\omega_s$  функции  $\omega(k)$  с  $\text{Im} \omega_s > 0$  существует только для достаточно мягких трубок.

Далее рассмотрим второе условие абсолютной неустойчивости, а именно направление распространения волн. Решения  $k(\omega)$  дисперсионного уравнения (3.9) при  $|\omega| \rightarrow \infty$  имеют вид

$$k_{1,2} = \left( \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} - \frac{\beta}{2} \right)^{-1} \left( \frac{3n+1}{\pi(2n+1)} \pm \sqrt{\left( \frac{3n+1}{\pi(2n+1)} \right)^2 - \left( \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} - \frac{\beta}{2} \right)} \right) \omega.$$

Легко видеть, что пространственные волны движутся в противоположных направлениях, если

$$\frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} - \frac{\beta}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \beta > \beta_{\text{div}} = \frac{2(3n+1)}{\pi^2(2n+1)}. \quad (3.12)$$

В результате критерий абсолютной неустойчивости записывается следующим образом:

$$\beta_{\text{div}}(n) < \beta < \beta_{\text{abs}}(n). \quad (3.13)$$

Это условие может быть выполнено только при  $n < 1/3$ , так как три кривые  $\beta_{\text{div}}(n)$ ,  $\beta_{\text{abs}}(n)$ ,  $\beta_{\text{H}}(n)$  пересекаются в точке  $n = 1/3$ . Область абсолютной неустойчивости показана на рис. 4.

Заметим, что области конвективной неустойчивости, окружающие область абсолютной неустойчивости на рис. 4, различны. Та область, которая находится ниже области абсолютной неустойчивости, представляет собой множество параметров, для которых обе волны движутся вниз по течению, так что любое возмущение также перемещается вниз по течению и покидает конечную область за конечное время. Седловая точка функции  $\omega(k)$ , хотя и существует, не имеет отношения к асимптотике локализованных возмущений трубки. Область конвективной неустойчивости, лежащая над областью абсолютной неустойчивости, представляет собой множество параметров, для которых одна волна бежит вниз по течению, а другая — вверх по течению. Однако седловая точка функции  $\omega(k)$  лежит в области  $\text{Im} \omega < 0$ . Отметим также, что первая область  $\{\beta < \beta_{\text{div}}\}$  соответствует очень “слабым” трубкам: в стационарном состоянии такие трубки не сужаются из-за падения давления в течении, а расширяются [39]. Такие значения параметров далее не рассматриваются.

#### 4. ГЛОБАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБКИ, ИМЕЮЩЕЙ ЛОКАЛЬНО ОСЛАБЛЕННЫЙ УЧАСТОК

**4.1. Задача на собственные значения.** Рассмотрим теперь неоднородную трубку, свойства которой меняются в пространстве. Будем исследовать возмущения, гармонически зависящие от времени:

$$\begin{pmatrix} Q'(z, t) \\ R'(z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q''(z) \\ R''(z) \end{pmatrix} e^{-i\omega t}.$$

Тогда из уравнения (3.1) получаем

$$R'' = -\frac{i}{2\pi R_s \omega} \frac{dQ''}{dz}.$$

Подставляя эти выражения в (3.2) и объединяя слагаемые, получаем уравнение для  $Q''(z)$ :

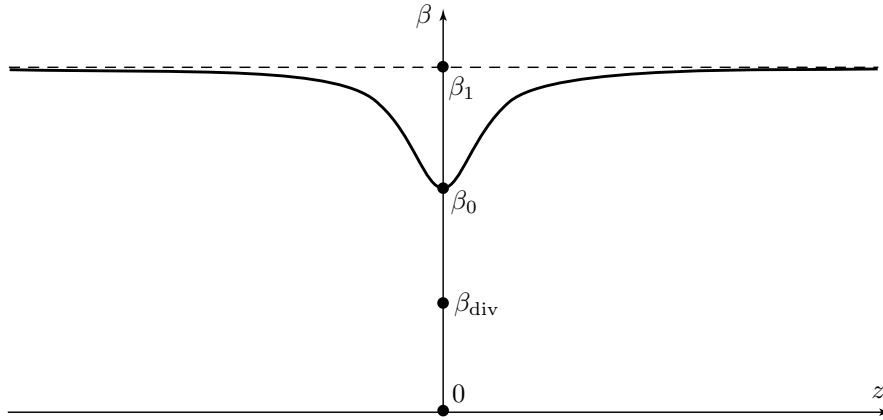
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi R_s} \left[ \pi \beta R_s^2 - \frac{2(3n+1)}{(2n+1)\pi R_s^3} \right] \frac{d^2 Q''}{dz^2} + \\ & + \left[ \frac{1}{2\pi R_s} \left\{ \left( 2\pi \beta R_s + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi R_s^4} \right) \frac{dR_s}{dz} + \frac{16(1-3n)}{\pi \text{Re} R_s^{3n}} \right\} + i\omega \frac{2(3n+1)}{(2n+1)\pi R_s^2} \right] \frac{dQ''}{dz} + \\ & + \left[ \omega^2 + i\omega \left( \frac{16n}{\pi \text{Re} R_s^{3n-1}} - \frac{4(3n+1)}{(2n+1)\pi R_s^3} \frac{dR_s}{dz} \right) \right] Q'' = 0, \quad (4.1) \end{aligned}$$

где  $\beta(z)$  и  $R_s(z)$  — заданные распределения жесткости и радиуса невозмущенного состояния трубки.

Далее предположим, что трубка в невозмущенном состоянии имеет постоянный радиус  $R_s(z) \equiv \text{const} = 1$ . Такая ситуация имеет место, когда падение давления внутри трубки из-за вязкого трения компенсируется падением внешнего давления (например, трубка моделирует сосуд, проходящий в организме с непостоянным внешним давлением). При этом будем считать, что жесткость трубки непостоянна и имеет вид

$$\beta(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1(\varepsilon z)^2}{1 + (\varepsilon z)^2}. \quad (4.2)$$

Эта функция задает распределение, стремящееся к  $\beta_1$  при  $z \rightarrow \pm\infty$  и имеющее локальный участок, где жесткость падает до  $\beta_0$  (рис. 5). Будем считать, что  $\beta_1 > \beta_{\text{н}}$ , а  $\beta_{\text{div}} < \beta_0 < \beta_{\text{н}}$ , т.е. вне некоторого интервала трубка локально устойчива, а в нем локально неустойчива. Параметр  $\varepsilon$  задает ширину “ослабленного” участка; в дальнейшем будем считать, что  $\varepsilon \ll 1$ , т.е.

Рис. 5. Функция  $\beta(z)$  (4.2)

изменение жесткости трубки происходит достаточно медленно. Это позволит ниже применить для построения собственных функций метод ВКБ.

Таким образом, окончательно уравнение для возмущения расхода  $Q''(z)$  примет вид

$$\frac{\beta(z) - \beta_{\text{div}}}{2} \frac{d^2 Q''}{dz^2} + B(\omega) \frac{dQ''}{dz} + C(\omega) Q'' = 0, \quad (4.3)$$

где

$$B(\omega) = \frac{8(1-3n)}{\pi^2 \text{Re}} + i\omega \frac{2(3n+1)}{(2n+1)\pi}, \quad C(\omega) = \omega^2 + i\omega \frac{16n}{\pi \text{Re}}.$$

Задача заключается в поиске собственных частот  $\omega$ , которым соответствует собственная функция, т.е. решение уравнения (4.3), затухающее на бесконечности,  $Q''(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \pm\infty$ . Если одна из таких частот имеет положительную мнимую часть,  $\text{Im} \omega > 0$ , то система глобально неустойчива. В таком случае локальная неустойчивость, имеющаяся в ослабленном участке, приводит к неустойчивости трубки в целом. В противном случае, если все собственные функции затухают, локальная неустойчивость подавляется окружающими локально устойчивыми участками.

**4.2. Приведение к каноническому виду.** Медленное изменение жесткости  $\beta(z)$  позволяет применить метод ВКБ для построения собственных функций уравнения (4.3). Для удобства его применения сначала преобразуем это уравнение, избавившись от первой производной  $dQ''/dz$ . Для этого сделаем подстановку

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= Q''(z) \exp \left\{ \int \frac{B(\omega)}{\beta(z) - \beta_{\text{div}}} dz \right\} = \\ &= Q''(z) \exp \left\{ \frac{B(\omega)}{\beta_1 - \beta_{\text{div}}} \left( z + \frac{(1-a)}{\varepsilon \sqrt{(a-d)(1-d)}} \arctg \left( \frac{1-d}{\sqrt{(a-d)(1-d)}} \varepsilon z \right) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где для удобства введены обозначения

$$d = \frac{\beta_{\text{div}}}{\beta_1} < a = \frac{\beta_0}{\beta_1} < 1.$$

Тогда функция  $\varphi(z)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + p(z, \omega) \varphi = 0, \quad (4.5)$$

где

$$p(z, \omega) = \frac{C(1 + (\varepsilon z)^2)((\beta_0 - \beta_{\text{div}}) + (\beta_1 - \beta_{\text{div}})(\varepsilon z)^2) - B^2(1 + (\varepsilon z)^2)^2 + 2B(\beta_1 - \beta_0)\varepsilon^2 z}{((\beta_0 - \beta_{\text{div}}) + (\beta_1 - \beta_{\text{div}})(\varepsilon z)^2)^2}.$$

Заметим, что последнее слагаемое в числителе имеет меньший порядок, чем остальные, поэтому им можно пренебречь. Для упрощения дальнейших выкладок введем обозначения

$$b(\omega) = \frac{B(\omega)}{\beta_0 - \beta_{\text{div}}}, \quad c(\omega) = \frac{C(\omega)}{\beta_0 - \beta_{\text{div}}}, \quad \varkappa = \frac{\beta_1 - \beta_{\text{div}}}{\beta_0 - \beta_{\text{div}}} > 1.$$

Тогда выражение для  $p(z, \omega)$  примет вид

$$p(z, \omega) = \frac{c(1 + (\varepsilon z)^2)(1 + \varkappa(\varepsilon z)^2) - b^2(1 + (\varepsilon z)^2)^2}{(1 + \varkappa(\varepsilon z)^2)^2}.$$

Асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения уравнения (4.5) имеют ВКБ-структуру

$$\varphi = A(z) \exp \left\{ \pm i \int \sqrt{p(z)} dz \right\}.$$

Каждое решение (определяемое выбором знака в показателе экспоненты) может быть определенным образом продолжено через линии Стокса, выходящие из точек поворота и разбивающие комплексную плоскость  $z$  на секторы. Для существования собственной функции необходима определенная структура линий Стокса, которая обеспечивала бы гладкий переход от затухания при  $z \rightarrow -\infty$  к затуханию при  $z \rightarrow +\infty$ . Перед изучением непосредственно линий Стокса рассмотрим возможное положение точек поворота и полюсов функции  $p(z)$ .

**4.3. Точки поворота и точки ветвления.** Точки, в окрестности которых ВКБ-разложение неприменимо, — это нули и полюсы функции  $p(z)$ . Первые являются точками поворота, в окрестности которых решение имеет вид функции Эйри, которая определяет возможность продолжения решений через линии Стокса. Вторые — полюсы функции  $p(z)$ , как будет показано далее, являются точками притяжения линий Стокса. Рассмотрим положения этих точек. Для удобства, пользуясь терминологией ВКБ-теории, введем “медленную переменную”  $\zeta = \varepsilon z$ . Тогда функцию  $p$  можно записать в виде

$$p(\zeta, \omega) = \frac{c(1 + \zeta^2)(1 + \varkappa\zeta^2) - b^2(1 + \zeta^2)^2}{(1 + \varkappa\zeta^2)^2},$$

а уравнение (4.5) — в виде

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} + p(\zeta, \omega) \varphi = 0. \quad (4.6)$$

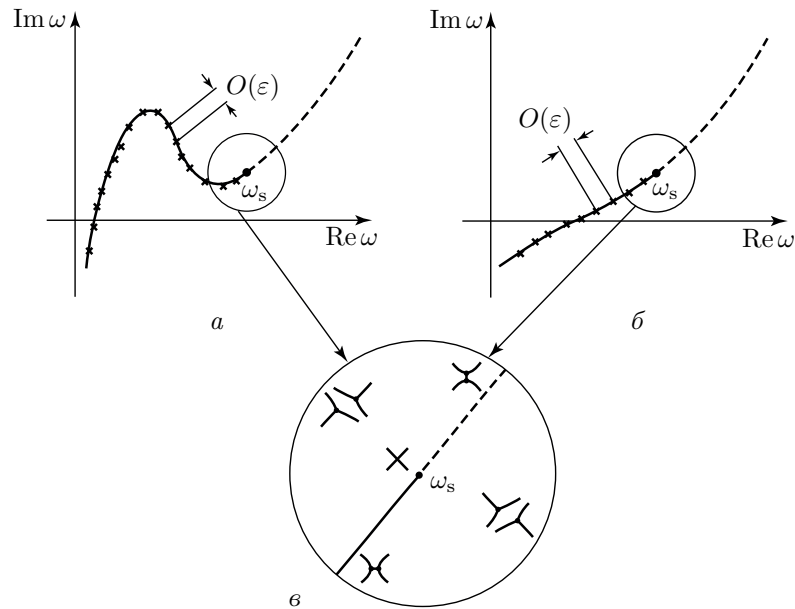
4.3.1. *Точки поворота.* Точки  $\zeta^0$ , являющиеся нулями функции  $p(\zeta)$ , определяются из уравнения

$$(c\varkappa - b^2)\zeta^4 + (c(\varkappa + 1) - 2b^2)\zeta^2 + (c - b^2) = 0, \quad (4.7)$$

т.е.

$$\zeta_{1,2,3,4}^0 = \pm \sqrt{\frac{\pm \sqrt{(c(\varkappa + 1) - 2b^2)^2 - 4(c\varkappa - b^2)(c - b^2)} - (c(\varkappa + 1) - 2b^2)}{2(c\varkappa - b^2)}}.$$

В окрестности каждой точки поворота уравнение (4.6) имеет вид уравнения Эйри, а его решения определяют правило продолжения решения через линии Стокса.



**Рис. 6.** Асимптотическая (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) кривая в комплексной плоскости  $\omega$ , соответствующая соединению двух точек поворота общей линией Стокса, при котором образуется собственная функция (сплошная линия), а также соответствующая соединению двух точек поворота, не дающему собственную функцию (штриховая линия). Положение собственных частот при конечных  $\varepsilon$  показано крестиками. Частота  $\omega_s$  соответствует кратной точке поворота. Максимально растущая собственная функция отвечает некратной (а) или кратной (б) точке поворота. Отдельно показана качественная структура линий Стокса в окрестности точки  $\omega_s$  (в). Воспроизведено из [24]

В работе [24] было показано, что при наличии двух точек поворота и отсутствии полюсов функции  $p(z)$  имеется счетный набор собственных частот, каждая из которых соответствует структуре линий Стокса, при которой точки поворота определенным образом соединяются общей линией Стокса (рис. 6). Предельным случаем такой конфигурации является кратная точка поворота. Соответствующая этому случаю частота  $\omega_s$  является концом кривой в комплексной плоскости  $\omega$ , в окрестности которой лежат собственные частоты (рис. 6). Эта частота  $\omega_s$  при некоторых дополнительных условиях соответствует наиболее быстро растущей моде, т.е. является наиболее высокой точкой на кривой (рис. 6, б), однако в общем случае она может и не быть точкой максимума  $\text{Im } \omega$  (рис. 6, а); более того, возможно, что  $\text{Im } \omega_s < 0$ , но часть кривой лежит в верхней полуплоскости и система неустойчива. В настоящей работе будет исследовано только условие  $\text{Im } \omega_s > 0$  и будет построена соответствующая собственная функция; будет показано, что это условие совпадает с необходимым условием глобальной неустойчивости. В результате будет получено необходимое и достаточное условие глобальной неустойчивости, однако неизвестно, является ли продемонстрированная собственная функция наиболее быстро растущей.

Таким образом, далее будем рассматривать ситуацию слияния двух точек поворота. Выясним, какие частоты приводят к кратным точкам поворота.

1. *Внутренний корень обращается в нуль:*

$$(c(\varkappa + 1) - 2b^2)^2 - 4(c\varkappa - b^2)(c - b^2) = c^2(\varkappa - 1)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что  $c(\omega) = 0$ , а значит, либо  $\omega = 0$ , либо  $\omega = -16in/(\pi \text{Re})$ . Таким образом, такая конфигурация точек поворота не может дать растущей собственной функции.

2. *Внешний корень обращается в нуль:  $c\varkappa = b^2$  или  $c = b^2$ .* Первый случай вырожденный: старший коэффициент уравнения (4.7) равен нулю, т.е. две точки поворота уходят в

бесконечность. Этот случай здесь не рассматривается, как не имеющий общего характера. Второй случай соответствует слиянию двух точек поворота при  $\zeta = 0$ , причем две другие точки располагаются в  $\zeta = \pm i$ :

$$\zeta_{1,2}^0 = 0, \quad \zeta_{3,4}^0 = \pm i.$$

Выясним, каким частотам  $\omega = \omega_s$  соответствует эта конфигурация. Записывая уравнение  $c(\omega) = b^2(\omega)$ , приходим к квадратному уравнению для частоты

$$\left( \beta_0 - \beta_{\text{div}} + \frac{4(3n+1)^2}{\pi^2(2n+1)^2} \right) \omega^2 + i\omega \left( \frac{16n}{\pi \text{Re}} (\beta_0 - \beta_{\text{div}}) - \frac{32(1-9n^2)}{\pi^3(2n+1)\text{Re}} \right) - \frac{64(1-3n)^2}{\pi^4 \text{Re}^2} = 0. \quad (4.8)$$

Поскольку старший коэффициент положительный, средний чисто мнимый, а младший отрицательный, положительность  $\text{Im} \omega_s$  соответствует отрицательной мнимой части среднего коэффициента:

$$\frac{16n}{\pi \text{Re}} (\beta_0 - \beta_{\text{div}}) - \frac{32(1-9n^2)}{\pi^3(2n+1)\text{Re}} < 0.$$

Выражая явно  $\beta$ , получаем, что слияние двух точек поворота при  $\zeta = 0$  происходит при  $\text{Im} \omega_s > 0$ , если

$$\beta_0 < \beta_{\text{abs}},$$

т.е. если неустойчивость в самом слабом месте трубы абсолютная.

Отметим, что решения  $\omega_s$  уравнения (4.8) имеют ненулевую вещественную часть, т.е. растущая мода имеет колебательный во времени характер.

4.3.2. *Полосы функции  $p(\zeta)$ .* Полосы функции  $p(\zeta)$ , очевидно, даются формулой

$$\zeta_{\pm}^p = \pm \frac{i}{\sqrt{\varkappa}}.$$

Рассмотрим уравнение (4.6) в окрестности любой из этих точек. Пусть  $\zeta = \zeta^p + \xi$ ,  $|\xi| \ll |\zeta^p|$ , — внутренняя переменная в окрестности точки  $\zeta^p$ . Подставляя ее в уравнение и оставляя только главный член разложения функции  $p(\zeta)$ , получим

$$p(\xi) = \frac{b^2(\varkappa-1)^2}{\varkappa^3} \frac{1}{\xi^2}.$$

Тогда уравнение (4.6) примет вид

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \frac{b^2(\varkappa-1)^2}{\varepsilon^2 \varkappa^3} \frac{1}{\xi^2} \varphi(\xi) = 0. \quad (4.9)$$

Точное решение этого уравнения есть

$$\varphi(\xi) = \xi^\alpha, \quad \alpha = \frac{1 \pm i\sqrt{4\lambda-1}}{2}, \quad \lambda = \frac{b^2(\varkappa-1)^2}{\varepsilon^2 \varkappa^3}. \quad (4.10)$$

Поскольку локальное волновое число для задачи (4.9) имеет вид

$$k_{1,2}(\xi) = \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{\xi}, \quad (4.11)$$

ВКБ-приближение к решению дается формулой

$$\varphi_{\text{ВКБ}}(\xi) = \exp \left\{ i \int k_j(\xi) d\xi \right\} = \xi^{\pm i\sqrt{\lambda}}.$$



Видно, что

$$\frac{\varphi(\xi)}{\varphi_{\text{WKB}}(\xi)} = \xi^{\frac{1}{2}+o(1)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, относительная погрешность  $\varphi$  и  $\varphi_{\text{WKB}}$  стремится к нулю при удалении от точки  $\zeta^{\text{P}}$ .

Рассмотрим расположение линий

$$\text{Im} \int (k_1(\xi) - k_2(\xi)) d\xi = \text{const},$$

представляющих собой линии Стокса, попавшие в окрестность точки  $\zeta^{\text{P}}$ . В силу (4.11) указанные линии описываются уравнением

$$\text{Re}(\sqrt{\lambda} \ln \xi) = \text{Re} \sqrt{\lambda} \ln |\xi| - \text{Im} \sqrt{\lambda} \arg \xi = \text{const}.$$

Отсюда видно, что такие линии суть спирали, закручивающиеся вокруг точки  $\zeta^{\text{P}}$ . Таким образом, линия Стокса, попавшая в окрестность одной из точек  $\zeta^{\text{P}}$ , больше не может из нее выйти, неограниченно закручиваясь и приближаясь к  $\zeta^{\text{P}}$ . В отличие от точек поворота, где неоднозначность ВКБ-решения устраняется рассмотрением однозначного точного решения в окрестности точки поворота — функции Эйри, полученная здесь неоднозначность характерна и для точного решения  $\varphi(\xi)$  (4.10) и, таким образом, в принципе неустранима: собственные функции задачи (4.5) многолиственны. Ниже за счет разрезов, выходящих из точек  $\zeta^{\text{P}}$ , будет выбрана однозначная ветвь собственной функции, определенная на всей “физической” вещественной оси  $z$ .

**4.4. Структура линий Стокса.** Расчет положения линий Стокса, задаваемых уравнением

$$\text{Im} \int_{\zeta^0}^{\zeta} (k_1(\zeta) - k_2(\zeta)) d\zeta = 0,$$

где  $\zeta^0$  — точка поворота, проводился численно. Поскольку изменение параметров не порождает каких-либо сингулярностей в уравнении (4.5), топология линий Стокса не меняется и достаточно рассмотреть лишь один набор параметров. Расчеты проводились для

$$n = 0.2, \quad \beta_0 = 0.347, \quad \beta_1 = 1.115. \quad (4.12)$$

Данному значению  $n$  отвечают  $\beta_{\text{fl}} = 0.897$ ,  $\beta_{\text{abs}} = 0.463$ , так что для значения  $\beta_0$  имеем абсолютную неустойчивость, а для  $\beta_1$  — устойчивость. Уравнение (4.8) имеет решения, обратно пропорциональные числу Рейнольдса  $\text{Re}$ , а функция  $p(\zeta)$  обратно пропорциональна его квадрату, поэтому в расчетах оно может быть принято любым — это не влияет на структуру линий Стокса. Для удобства было принято  $\text{Re} = 1$ . Тогда уравнение (4.8) имеет следующие корни:  $\omega_s \approx \pm 0.3378 + 0.155i$ . Для расчета линий Стокса выбрано значение с положительной вещественной частью.

Для понимания структуры линий Стокса сначала рассмотрим результаты расчетов для частоты  $\omega = 0.337 + 0.165i$ , близкой к  $\omega_s$ , но не равной ей (рис. 7, а). Видно, что имеются четыре точки поворота  $\zeta^0$ , из которых две ( $\zeta_{1,2}^0$ ) расположены вблизи  $\zeta = 0$ , а еще две ( $\zeta_{3,4}^0$ ) — вблизи  $\zeta = \pm i$ . Имеются два полюса  $\zeta_{\pm}^{\text{P}}$  функции  $p(\zeta)$ . Видно, что из трех линий Стокса, выходящих из каждой точки поворота, две уходят на бесконечность, стремясь асимптотически к прямым линиям, а одна наматывается в виде спирали на одну из точек  $\zeta_{\pm}^{\text{P}}$ . При стремлении  $\omega$  к  $\omega_s$  точки поворота  $\zeta_{1,2}^0$ , близкие к 0, сближаются и при  $\omega = \omega_s$  сливаются и дают структуру линий Стокса, показанную на рис. 7, б.

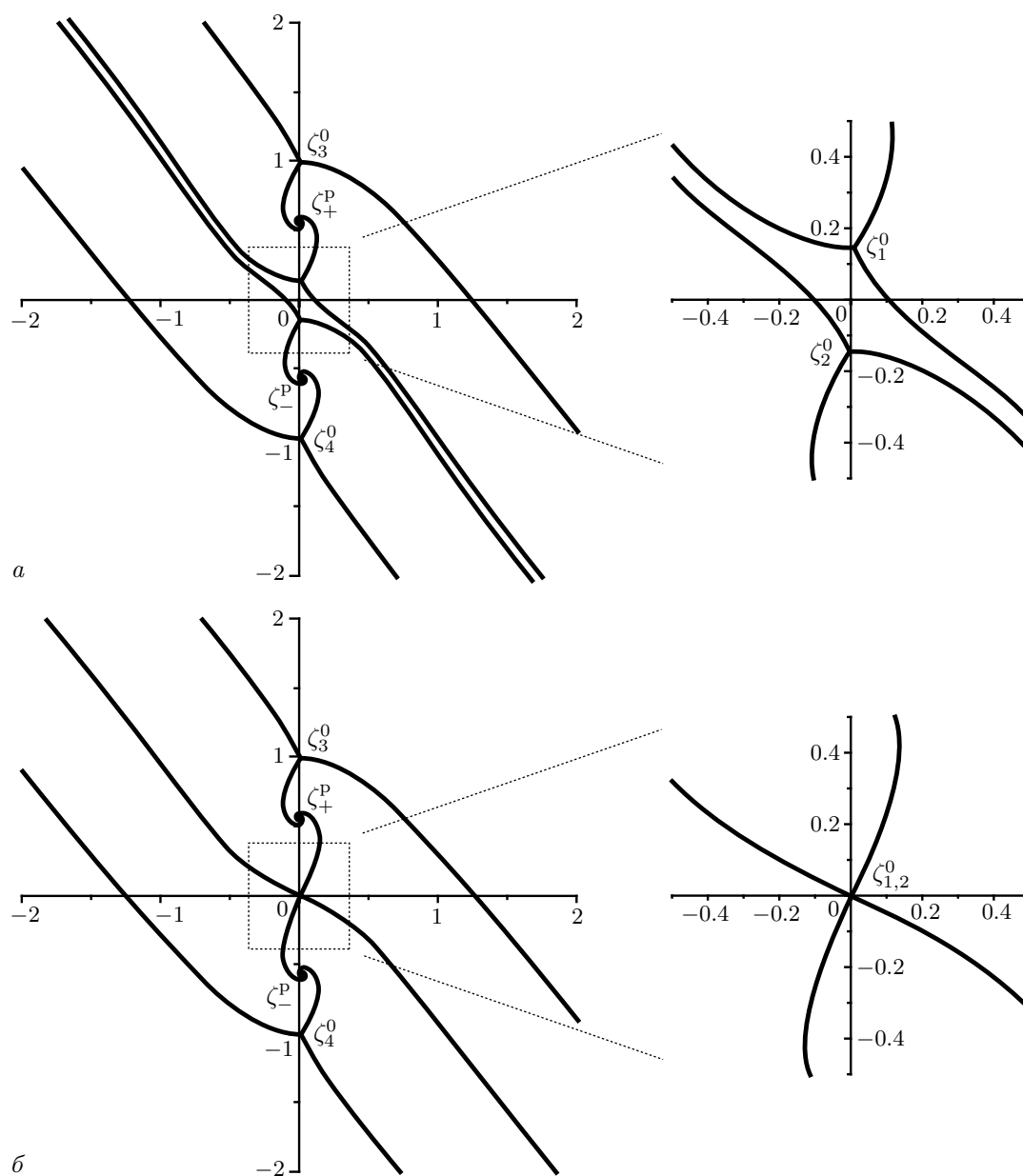
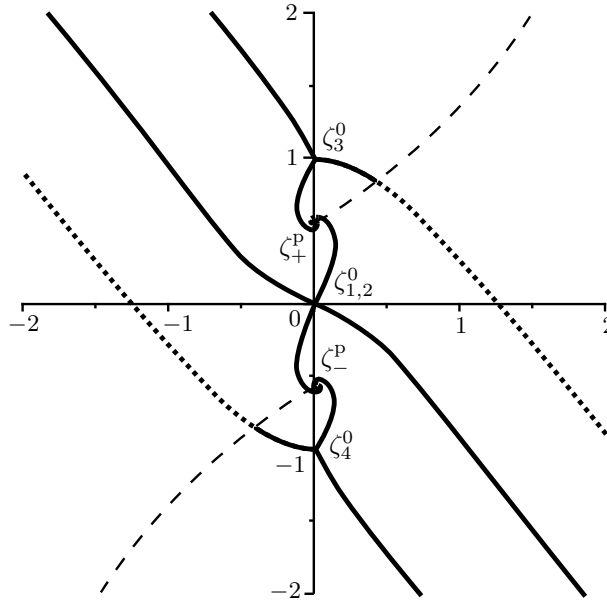


Рис. 7. Линии Стокса на комплексной плоскости  $z$  при  $\omega$ , близких к  $\omega_s$  (а) и равных  $\omega_s$  (б)

Поскольку ветвление решения в окрестности точек  $\zeta^P$  дает бесконечнолиственную функцию, для построения собственной функции, гладкой вдоль оси  $z$ , необходимо провести разрезы, как показано на рис. 8. Линии Стокса, выходящие из точек поворота  $\zeta_{3,4}^0 = \pm i$ , в результате не попадают на вещественную ось: одна удаляется от нее, другая наматывается на одну из точек  $\zeta^P$  и после каждого витка уходит на следующий лист римановой поверхности, третья пересекает разрез до пересечения вещественной оси и уходит на другой лист. В результате в окрестности вещественной оси картина выглядит так, как было бы при наличии лишь двух кратных точек поворота  $\zeta_{1,2}^0 = 0$ . Такая конфигурация соответствует существованию собственной функции, а роль окрестности кратной точки поворота заключается в обеспечении гладкого “переключения” от затухания при  $z \rightarrow -\infty$  к затуханию при  $z \rightarrow +\infty$ .

В результате доказано, что при  $\omega = \omega_s$  существует глобальная собственная функция уравнения (4.5), т.е. ненулевое решение, затухающее при  $z \rightarrow \pm\infty$ .



**Рис. 8.** Линии Стокса на комплексной плоскости  $z$  при  $\omega = \omega_s$  и разрезы, выходящие из точек  $\zeta = \zeta^P$ . Разрезы показаны штриховой линией; линии Стокса, уходящие на другой лист римановой поверхности, — пунктирной

**4.5. Условие затухания для  $Q''(z)$ .** Поскольку  $p(z) \rightarrow (c\kappa - b^2)/\kappa^2$ ,  $z \rightarrow \pm\infty$ , затухание функции  $\varphi(z)$  имеет вид

$$\varphi(z) \sim \exp\left\{\pm \frac{\sqrt{b^2 - c\kappa}}{\kappa} z\right\}.$$

Однако необходимо еще проверить затухание для исходной неизвестной функции  $Q''(z)$ . Пользуясь формулой (4.4), имеем

$$Q''(z) \sim \exp\left\{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - c\kappa}}{\kappa} z\right\}.$$

Для случая, соответствующего кратной точке поворота, имеем  $c(\omega) = b^2(\omega)$ , так что условие затухания функции  $Q''$  переписывается в виде

$$|\operatorname{Re} b| < |\operatorname{Im} b| \sqrt{\kappa - 1}. \tag{4.13}$$

Подставив сюда частоту собственной функции  $\omega = \omega_s$ , т.е. решение уравнения (4.8), получим неравенство

$$\frac{\beta_1 - \beta_0}{\beta_0 - \beta_{\operatorname{div}}(n)} > \frac{(n + 1)^2}{4(3n + 1)^2 n^2} \frac{(\beta_0 \pi^2 - \frac{2(3n+1)}{2n+1})^2}{\frac{(3n-1)^2(6n^2+3n+1)^2}{4n^4(2n+1)^2} - (\beta_0 \pi^2 + \frac{6n^3-n^2-1}{2(2n+1)n^2})^2}.$$

Это соотношение слишком громоздко для аналитического исследования. Поэтому для минимального значения  $\beta_1 = \beta_{\text{fl}}(n)$  и всего диапазона  $\beta_{\operatorname{div}}(n) < \beta_0 < \beta_{\operatorname{abs}}(n)$  было численно проверено, что это неравенство всегда выполнено в диапазоне  $0 < n < 1/3$ , а значит, оно выполнено и при всех  $\beta_1 > \beta_{\text{fl}}(n)$ . Таким образом, это неравенство не накладывает дополнительных ограничений на значения параметров и затухание для  $Q''(z)$  имеется всегда, когда имеется затухание для  $\varphi(z)$ .

**Таблица 1.** Собственные частоты при параметрах (4.12) и различных значениях  $\varepsilon$

| $\varepsilon^2$ | $\omega$           |
|-----------------|--------------------|
| 1               | $0.3838 + 0.0930i$ |
| 0.1             | $0.3596 + 0.1313i$ |
| 0.01            | $0.3454 + 0.1471i$ |
| 0.001           | $0.3403 + 0.1528i$ |
| Асимптотика     | $0.3378 + 0.1550i$ |

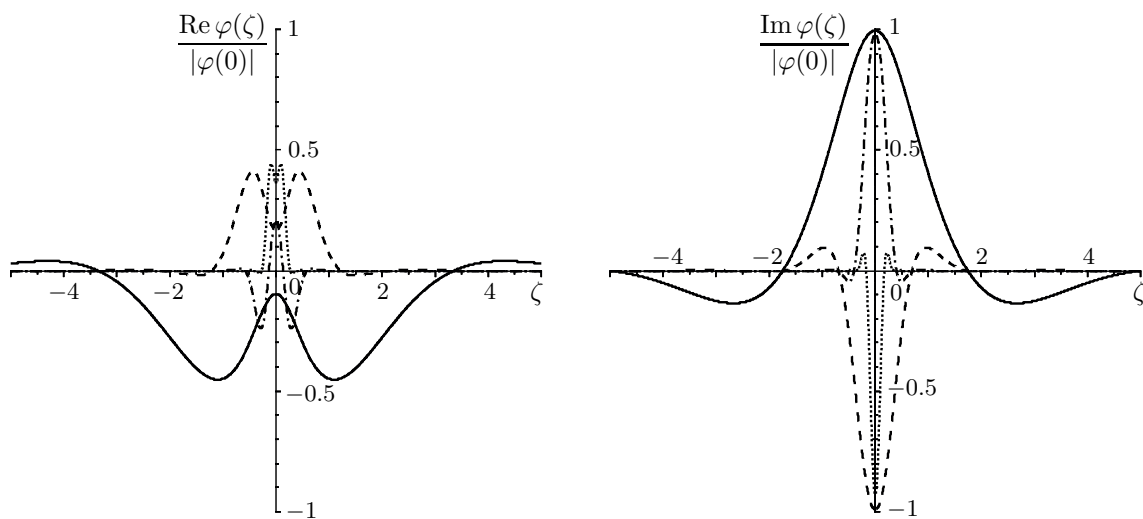
Итак, при малых  $\varepsilon$  трубка с текущей жидкостью глобально неустойчива, т.е. существует растущая собственная функция уравнения (4.3), при выполнении лишь одного условия: локальная неустойчивость в ослабленном участке абсолютна. Это же условие является необходимым для глобальной неустойчивости [9], поэтому для рассматриваемой задачи оно является необходимым и достаточным.

Отметим, что существует семейство других собственных функций, в котором две точки поворота не сливаются, но соединяются общей линией Стокса. В настоящей работе это семейство не исследуется, так как для неустойчивости достаточно существования хотя бы одной растущей собственной функции.

**4.6. Прямое численное решение уравнения для возмущений.** Для проверки полученных асимптотических результатов и оценки того, как влияет величина  $\varepsilon$  на значение собственной частоты, задача на собственные значения была решена численно для параметров (4.12) на отрезке  $\zeta \in [L, 0]$ . В расчетах было выбрано  $L = -5$ , поскольку значение  $\beta(L)$  близко к асимптотическому значению  $\beta_1$  и при  $\zeta < L$  решения (4.6) близки к экспонентам  $\exp\{\pm i\sqrt{p_\infty}\zeta/\varepsilon\}$ , где  $p_\infty$  — предельное значение  $p(\zeta)$  при  $\zeta \rightarrow -\infty$ . При  $\zeta = L$  были заданы значения

$$\varphi = 1, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{i\sqrt{p_\infty}}{\varepsilon}$$

(ветвь корня выбиралась так, что  $\text{Im} \sqrt{p_\infty} > 0$ , что обеспечивает затухание решения при  $\zeta \rightarrow -\infty$ ), и уравнение (4.6) численно интегрировалось до  $\zeta = 0$ . Для различных значений  $\varepsilon$  в



**Рис. 9.** Собственные функции  $\varphi(\zeta)$  уравнения (4.6) при параметрах (4.12) и  $\varepsilon^2 = 1$  (сплошная кривая),  $\varepsilon^2 = 0.1$  (штриховая кривая),  $\varepsilon^2 = 0.01$  (штрихпунктирная кривая),  $\varepsilon^2 = 0.001$  (пунктирная кривая)

окрестности  $\omega_s$  искалось такое значение частоты  $\omega$ , что

$$\frac{d\varphi(0)}{d\zeta} = 0.$$

При этом условии решение симметрично продолжается в область  $\zeta > 0$  с непрерывной при  $\zeta = 0$  второй производной, давая четную собственную функцию. В табл. 1 приведены результаты расчетов, на рис. 9 показаны графики соответствующих собственных функций, нормированных на модуль значения в нуле. Собственные функции, как и должно быть согласно ВКБ-приближению, представляют собой сконцентрированные вокруг  $\zeta = 0$  распределения. Видно, что при уменьшении  $\varepsilon$  рассчитанные значения частот стремятся к асимптотическому. При этом даже для  $\varepsilon = 1$  имеет место неустойчивость, а значение частоты весьма близко к асимптотическому.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована потеря устойчивости, не связанная с отрывом потока от стенок трубки и потерей осесимметричности трубки. Для бесконечно длинной однородной трубки найдены области обыкновенной и абсолютной неустойчивости. Эти области существуют при показателях степенного закона  $n < 0.611$  и  $n < 1/3$  соответственно; таким образом, только течение псевдопластической жидкости может приводить к неустойчивости, а, например, течение линейно-вязкой жидкости ( $n = 1$ ) устойчиво по отношению к рассматриваемым возмущениям.

Для бесконечно длинной неоднородной трубки постоянного радиуса, жесткость которой медленно меняется в пространстве и у которой есть “ослабленный” участок конечной длины, где имеется локальная неустойчивость, получено достаточное условие глобальной неустойчивости, совпадающее с известным необходимым условием: трубка в целом неустойчива, если и только если локальная неустойчивость в наиболее ослабленном участке абсолютная; в противном случае локальная неустойчивость подавляется окружающими локально устойчивыми участками.

Построенная растущая собственная функция соответствует кратной точке поворота, она локализована в наиболее “слабом” участке. Остался открытым вопрос о том, является ли эта собственная функция наиболее быстро растущей: имеется не изучавшееся здесь семейство собственных функций, в которых две точки поворота связаны общей линией Стокса. Также представляет интерес вопрос о том, насколько две точки поворота могут быть “раздвинуты”, чтобы собственные функции оставались растущими, и как это связано с распределением локальных свойств устойчивости трубки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абакумов М.В., Ашметков И.В., Есикова Н.Б., Кошелев В.Б., Мухин С.И., Соснин Н.В., Тилижин В.Ф., Фаворский А.П., Хруленко А.Б. Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы // Мат. моделирование. 2000. Т. 12, №2. С. 106–117.
2. Anand M., Rajagopal K.R. A shear-thinning viscoelastic fluid model for describing the flow of blood // Int. J. Cardiovasc. Med. Sci. 2004. V. 4, N 2. P. 59–68.
3. Барлукова А.М., Черевко А.А., Чупахин А.П. Бегущие волны в одномерной модели гемодинамики // Прикл. механика и техн. физика. 2014. Т. 55, №6. С. 16–26.
4. Bers A. Space-time evolution of plasma instabilities—absolute and convective // Handbook of plasma physics / Ed. by A.A. Galeev, R.N. Sudan. Amsterdam: North-Holland, 1983. V. 1. P. 451–517.
5. Bertram C.D., Raymond C.J., Pedley T.J. Mapping of instabilities for flow through collapsed tubes of differing length // J. Fluids Struct. 1990. V. 4, N 2. P. 125–153.
6. Bertram C.D., Tscherry J. The onset of flow-rate limitation and flow-induced oscillations in collapsible tubes // J. Fluids Struct. 2006. V. 22, N 8. P. 1029–1045.

7. *Briggs R.J.* Electron-stream interaction with plasmas. Cambridge, MA: MIT Press, 1964.
8. Cardiovascular mathematics: Modeling and simulation of the circulatory system / Ed. by L. Formaggia, A. Quarteroni, A. Veneziani. Milano: Springer, 2010. (Model. Simul. Appl.; V. 1).
9. *Chomaz J.-M., Huerre P., Redekopp L.G.* A frequency selection criterion in spatially developing flows // *Stud. Appl. Math.* 1991. V. 84, N 2. P. 119–144.
10. *Coene P.-P.L.O., Groen A.K., Davids P.H.P., Hardeman M., Tytgat G.N.J., Huibregtse K.* Bile viscosity in patients with biliary drainage. Effect of co-trimoxazole and N-acetylcysteine and role in stent clogging // *Scand. J. Gastroenterol.* 1994. V. 29, N 8. P. 757–763.
11. *Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A.* One-dimensional models for blood flow in arteries // *J. Eng. Math.* 2003. V. 47. P. 251–276.
12. *Galdi G.P., Rannacher R., Robertson A.M., Turek S.* Hemodynamical flows: Modeling, analysis and simulation. Basel: Birkhäuser, 2008.
13. *Gijsen F.J.H., van de Vosse F.N., Janssen J.D.* The influence of the non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: Steady flow in a carotid bifurcation model // *J. Biomech.* 1999. V. 32, N 6. P. 601–608.
14. *Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н.* Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000.
15. *Grotberg J.B., Jensen O.E.* Biofluid mechanics in flexible tubes // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2004. V. 36. P. 121–147.
16. *Heil M., Boyle J.* Self-excited oscillations in three-dimensional collapsible tubes: Simulating their onset and large-amplitude oscillations // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 652. P. 405–426.
17. *Heil M., Hazel A.L.* Fluid-structure interaction in internal physiological flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2011. V. 43. P. 141–162.
18. *Jensen O.E.* Instabilities of flow in a collapsed tube // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 220. P. 623–659.
19. *Jensen O.E., Pedley T.J.* The existence of steady flow in a collapsed tube // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 206. P. 339–374.
20. *Katz A.I., Chen Y., Moreno A.H.* Flow through a collapsible tube: Experimental analysis and mathematical model // *Biophys. J.* 1969. V. 9, N 10. P. 1261–1279.
21. *Ku D.N.* Blood flow in arteries // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1997. V. 29. P. 399–434.
22. *Kuchumov A.G., Gilev V., Popov V., Samartsev V., Gavrilov V.* Non-Newtonian flow of pathological bile in the biliary system: experimental investigation and CFD simulations // *Korea–Aust. Rheol. J.* 2014. V. 26, N 1. P. 81–90.
23. *Kudenatti R.B., Bujurke N.M., Pedley T.J.* Stability of two-dimensional collapsible-channel flow at high Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 705. P. 371–386.
24. *Le Dizès S., Huerre P., Chomaz J.M., Monkewitz P.A.* Linear global modes in spatially developing media // *Philos. Trans. R. Soc. London A.* 1996. V. 354, N 1705. P. 169–212.
25. *Liu H.F., Luo X.Y., Cai Z.X.* Stability and energy budget of pressure-driven collapsible channel flows // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 705. P. 348–370.
26. *Luo X.Y., Pedley T.J.* Multiple solutions and flow limitation in collapsible channel flows // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 420. P. 301–324.
27. *Marzo A., Luo X.Y., Bertram C.D.* Three-dimensional collapse and steady flow in thick-walled flexible tubes // *J. Fluids Struct.* 2005. V. 20, N 6. P. 817–835.
28. *Metzner A.B., Reed J.C.* Flow of non-Newtonian fluids—Correlation of the laminar, transition, and turbulent-flow regions // *AIChE J.* 1955. V. 1, N 4. P. 434–440.
29. *Moore J.E., Jr., Maier S.E., Ku D.N., Boesiger P.* Hemodynamics in the abdominal aorta: A comparison of in vitro and in vivo measurements // *J. Appl. Physiol.* 1985. V. 76, N 4. P. 1520–1527.
30. *Païdoussis M.P.* Fluid-structure interactions: Slender structures and axial flow. San Diego, CA: Acad. Press, 1998. V. 1.
31. *Pedley T.J.* Arterial and venous fluid dynamics // *Cardiovascular fluid mechanics* / Ed. by G. Pedrizzetti, K. Perktold. Wien: Springer, 2003. P. 1–72.
32. *Pedley T.J., Brook B.S., Seymour R.S.* Blood pressure and flow rate in the giraffe jugular vein // *Philos. Trans. R. Soc. London B: Biol. Sci.* 1996. V. 351, N 1342. P. 855–866.
33. *Reymond P., Merenda F., Perren F., Rüfenacht D., Stergiopoulos N.* Validation of a one-dimensional model of the systemic arterial tree // *Amer. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* 2009. V. 297, N 1. P. 208–222.
34. *Shapiro A.H.* Physiological and medical aspects of flow in collapsible tubes // *Proc. 6th Canadian Congress of Applied Mechanics.* Vancouver: Univ. Br. Columbia, 1977. P. 883–906.

35. *Симаков С.С., Холодов А.С., Евдокимов А.В.* Методы расчета глобального кровотока в организме человека с использованием гетерогенных вычислительных моделей // Медицина в зеркале информатики. М.: Наука, 2008. С. 124–170.
36. *Smith N.P., Pullan A.J., Hunter P.J.* An anatomically based model of transient coronary blood flow in the heart // SIAM J. Appl. Math. 2002. V. 62, N 3. P. 990–1018.
37. *Vassilevski Yu., Simakov S., Salamatova V., Ivanov Yu., Dobroserdova T.* Numerical issues of modelling blood flow in networks of vessels with pathologies // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2011. V. 26, N 6. P. 605–622.
38. *Whittaker R.J., Heil M., Jensen O.E., Waters S.L.* Predicting the onset of high-frequency self-excited oscillations in elastic-walled tubes // Proc. R. Soc. London A. 2010. V. 466. P. 3635–3657.
39. *Юшутин В.С.* Устойчивость деформируемых каналов при течении по ним нелинейно-вязких сред со степенным законом упрочнения // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 2012. № 4. С. 67–70.