

УДК 534.11

Линейное и нелинейное развитие изгибных возмущений в трубе с переменными упругими свойствами с протекающей внутри жидкостью*

К. Э. Абдульманов^а, В. В. Веденеев^б

Поступило 29.01.2023; после доработки 28.02.2023; принято к публикации 20.05.2023

Рассматриваются изгибные колебания трубы, заполненной движущейся жидкостью, лежащей на упругом основании с неоднородным коэффициентом упругости. Ранее А.Г. Куликовским было аналитически показано, что возможно такое распределение параметров упругости, при котором в каждой точке система будет либо локально устойчивой, либо неустойчивой конвективно. При этом, несмотря на отсутствие локальной абсолютной неустойчивости, существует глобальная растущая мода, образование которой связано с наличием точек внутреннего отражения волн. В настоящей работе проводится численное моделирование развития начального возмущения в такой системе. В линейной постановке продемонстрировано, как происходит преобразование возмущения в растущую собственную моду после серии отражений и прохождений через участок локальной неустойчивости. В нелинейной постановке, где учитывается нелинейное натяжение трубы в рамках модели Кармана, показано, что рост возмущения ограничен, при этом колебания приобретают квазихаотический характер, но не покидают зоны, ограниченной точками внутреннего отражения, определяемыми линеаризованной задачей.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tm4344>

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [6] аналитически методом ВКБ исследовались собственные изгибные колебания неоднородной упругой трубки с жидкостью (рис. 1). Неоднородность трубки состояла в том, что изгибная жесткость D являлась функцией пространственной координаты и медленно менялась по квадратичному закону. Дисперсионное уравнение имеет четвертый порядок по волновому числу k , соответственно существуют четыре пространственные волны $k_i(\omega)$, $i = 1, \dots, 4$. Было показано, что при определенном выборе параметров существует зона $-A_2 < x < A_2$, где трубка локально неустойчива, и имеются точки внутреннего отражения (в терминах метода ВКБ — точки поворота) $x = \pm A_3$, $|A_3| > |A_2|$. При этом образуется система из трех превращающихся друг в друга волн, формирующих собственную функцию со следующей структурой:

- волна, соответствующая волновому числу k_2 , распространяется слева направо, причем при $x < -A_2$ волновое число k_2 действительно;
- при переходе через точку $x = -A_2$ эта волна превращается в одну растущую и одну затухающую (комплексно сопряженные k_1, k_2); волна k_1 испытывает усиление на интервале $-A_2 < x < A_2$, содержащем начало координат;

*Исследование второго автора (разделы 1, 2, 4) выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-30012, <https://rscf.ru/project/19-71-30012/>, в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН.

^аМеханико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

^бМатематический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.

E-mail: abdulmanov.kirill@gmail.com (К.Э. Абдульманов), vasily@vedeneev.ru (В.В. Веденеев).



Рис. 1. Труба с текущей жидкостью на упругом основании

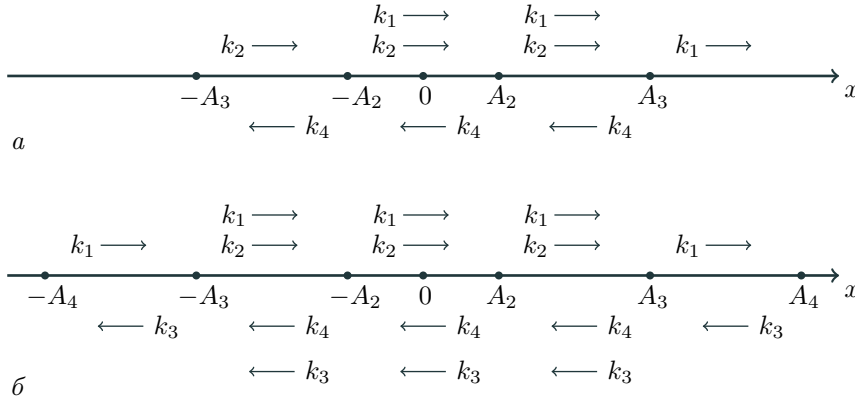


Рис. 2. Структура движения волн и точки поворота: *a* — в исходной постановке [6]; *б* — после модификации

- после перехода через точку $x = A_2$ эти волны превращаются в две волны с действительными k_1, k_2 , причем амплитуда волны k_2 вырастает по сравнению с той, которую она имела до прохождения интервала усиления $-A_2 < x < A_2$;
- волна k_2 отражается от точки $x = A_3 > A_2$ и превращается в волну k_4 , распространяющуюся в противоположном направлении (влево);
- волна k_4 , в свою очередь, отражается от симметричной точки $x = -A_3$ и превращается в волну k_2 ; далее цикл отражений повторяется;
- волна k_1 покидает интервал $(-A_3, A_3)$ и уходит неограниченно вправо.

Таким образом, имеется замкнутый цикл отражений волн от точек поворота $x = \pm A_3$ с одновременным ростом амплитуды на каждом цикле при прохождении интервала $(-A_2, A_2)$. Схематично данный цикл показан на рис. 2, *a*. На каждом цикле происходит испускание волны, соответствующей k_1 , которая неограниченно уходит вправо.

Целью настоящей работы является численное моделирование указанного процесса, в том числе с учетом нелинейных членов. Отметим, однако, что испускание волны k_1 в сторону $x \rightarrow +\infty$ затрудняет постановку граничного условия при численном моделировании. Для решения данной проблемы мы модифицировали задачу следующим образом: неоднородность изгибной жесткости трубки, рассмотренную в [6], мы заменили на неоднородность жесткости упругого основания F , изменяющейся по такому же квадратичному закону. В таком случае образуется система уже из четырех превращающихся друг в друга волн с тем отличием, что волна k_1 не просто покидает область $(-A_3, A_3)$, а отражается от новой точки поворота $x = A_4 > A_3$ и превращается в волну с действительным k_3 , распространяющуюся влево. В свою очередь, она отражается от симметричной точки $x = -A_4$ и превращается в волну с действительным k_1 , движущуюся вправо. Таким образом, после указанной модификации всё колебание трубы локализовано в интервале $-A_4 < x < A_4$ (рис. 2, *б*). Постановка любых граничных условий в точках, удаленных от $(-A_4, A_4)$, позволит численно пронаблюдать цикл превращающихся друг в друга и усиливающихся волн, образующих собственную функцию.

Ниже на первом этапе численно изучается линейная задача о развитии возмущения в трубе с текущей в ней жидкостью, находящейся на неоднородном упругом основании, когда во

всех точках выполняется локальное условие устойчивости или конвективной неустойчивости. Показано, что при этом формируется глобальная собственная функция, что подтверждает аналитические построения работы [6].

На втором этапе в исходную задачу добавляется нелинейность, вызванная растягивающими напряжениями, возникающими при изгибе (модель больших прогибов Кармана). При тех же условиях, что и на первом этапе, проводится численное моделирование развития возмущения.

Интерес к данной задаче связан с тем, что растущая глобальная собственная мода, построенная в [6], не требует существования зоны локальной абсолютной неустойчивости: во всех точках трубы имеется либо конвективная неустойчивость, либо устойчивость. Между тем в работах [2, 8] доказано, что для систем второго порядка, т.е. имеющих две пространственные волны, необходимым условием существования растущей глобальной собственной моды является наличие локальной абсолютной неустойчивости. В ряде конкретных задач, например при осесимметричных движениях жидкости в эластичных трубках [16], при возникновении дорожки Кармана в следе за цилиндром [9, 10], в горячих струях [3], также доказано, что неустойчивость неоднородной системы имеет место только при наличии зоны локальной абсолютной неустойчивости. Работа [6] показывает, что в случае взаимодействия более чем двух волн растущая глобальная собственная мода может существовать и без локальной абсолютной неустойчивости, т.е. результаты работ [2, 8] в общем случае неверны для систем порядка выше второго. Для систем второго порядка ранее также были изучены возможные виды нелинейных глобальных собственных мод, т.е. нейтральных колебаний нелинейной неоднородной системы [11–13]. Во всех обнаруженных типах мод положения переднего и заднего фронтов возмущения определяются условиями, диктуемыми чисто линейной задачей, а нелинейность определяет поведение возмущения лишь в его центральной части. Представляет интерес выяснить, будет ли это свойство распространяться на нелинейную задачу, рассматриваемую в настоящей работе, где, помимо наличия более чем двух пространственных волн, имеет место качественно иной характер нелинейности.

2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА

2.1. Постановка задачи. Рассматривается задача о поперечных колебаниях трубы, лежащей на упругом основании, по которой движется идеальная несжимаемая жидкость. Ось x направлена вдоль невозмущенной прямолинейной оси трубы. Поперечное смещение трубы $w(x, t)$ удовлетворяет уравнению [5]

$$\rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w = -Fw - D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad (2.1)$$

где ρ_1 и ρ_2 — погонные массы трубы и жидкости, v — скорость жидкости, F — коэффициент жесткости упругого основания, D — изгибная жесткость трубы (все величины считаются безразмерными).

Труба закреплена с двух сторон, т.е. граничные условия имеют вид

$$w(x, t)|_{x=\pm L/2} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\pm L/2} = 0, \quad (2.2)$$

где L — длина трубы. В начальный момент времени задаются начальные условия

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = w_1(x). \quad (2.3)$$

При рассмотрении волновых движений, $w(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$, дисперсионное уравнение, соответствующее уравнению (2.1), разрешенное относительно ω , имеет вид

$$\omega = Uk \pm \sqrt{Qk^4 - Pk^2 + R(x)}, \quad (2.4)$$

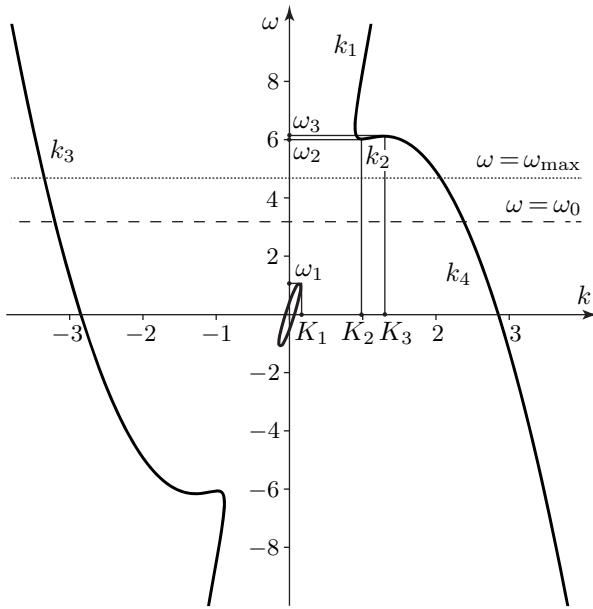


Рис. 3. Дисперсионная кривая $\omega(k)$ при $x = 0$

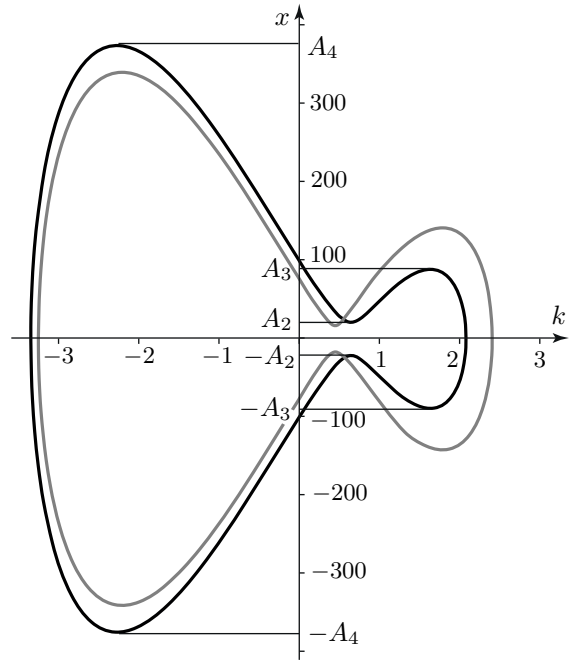


Рис. 4. Зависимость $x(k)$ при $\omega = \omega_0$ (серая кривая) и $\omega = \omega_{\max}$ (черная кривая)

где

$$U = \frac{\rho_2 v}{\rho_1 + \rho_2}, \quad P = \frac{\rho_1 \rho_2 v^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}, \quad Q = \frac{D}{\rho_1 + \rho_2}, \quad R(x) = \frac{F(x)}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Будем считать, что имеется неоднородное распределение коэффициента упругости основания $R(x) = A + Bx^2$, а U, P, Q, A, B — положительные постоянные, причем A и B считаются малыми. Задание такой зависимости $R(x)$ физически означает ослабление восстанавливающей силы вблизи начала координат.

2.2. Точки поворота. Рассмотрим график функции $\omega(k) = Uk \pm \sqrt{Qk^4 - Pk^2 + A + Bx^2}$ при вещественных k и $x = 0$, показанный на рис. 3. Все графики здесь и далее построены при параметрах задачи

$$\rho_1 = 0.1, \quad \rho_2 = 0.9, \quad v = 8, \quad D = 7, \quad A = 0.1, \quad B = 0.002.$$

Значение $A = R(0)$ выбирается так, чтобы при $x = 0$ было выполнено неравенство $Qk^4 - Pk^2 + R(x) < 0$ на некотором интервале значений k (рис. 3), который исчезает с ростом x . Таким образом, в окрестности начала координат имеется неустойчивость системы. Параметр B подбирается малым, чтобы обеспечить медленное изменение функции $R(x)$. Для обеспечения роста собственной моды, построенной в работе [6] в виде цепочки превращающихся друг в друга волн, необходимо, чтобы частота ω соответствовала значениям из области $\omega_1 < \omega < \omega_2$ на рис. 3. В этом случае вблизи начала координат будет иметь место локальный рост возмущений ($\text{Im } k < 0$ для волны, движущейся слева направо), причем во всех точках выполняется локальное условие конвективной неустойчивости $\rho_1/\rho_2 < 1/8$ (см. [7]). Далее для расчетов выбрано значение

$$\omega = \omega_0 = 3.266,$$

показанное на рис. 3.

На плоскости действительных k и x (рис. 4) кривая $\omega(k, x) = \omega_0$ имеет вид, обеспечивающий рост возмущений около начала координат.

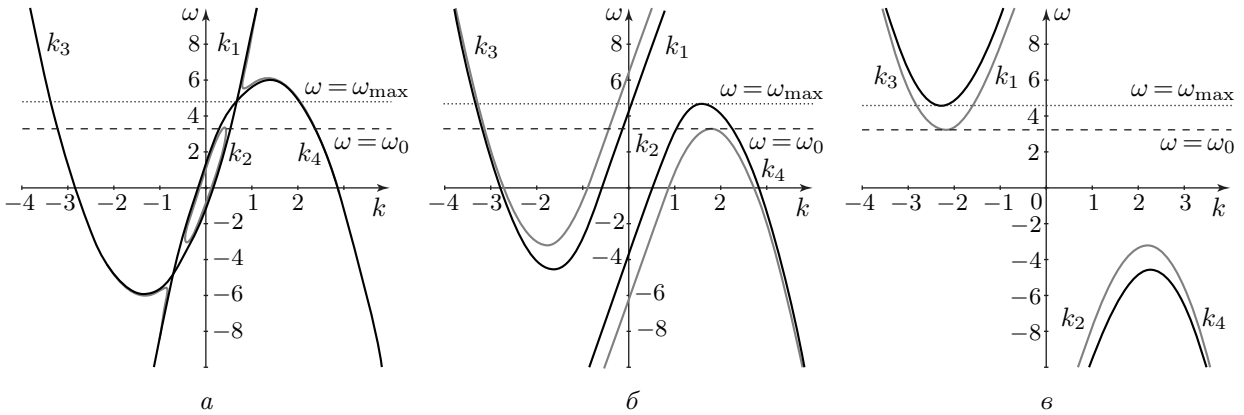


Рис. 5. Дисперсионная кривая при $\omega = \omega_0$ (серая) и $\omega = \omega_{\max}$ (черная): *a* — при $x = A_2(\omega)$; *б* — при $x = A_3(\omega)$; *в* — при $x = A_4(\omega)$

Точки поворота, т.е. значения x , соответствующие ветвлению функции $k(\omega)$ при заданной частоте ω_0 , можно найти следующим образом: координата x является параметром в дисперсионном соотношении (2.4). Постепенно увеличивая значение x , найдем все необходимые точки:

- (1) касание ветвей графика $\omega(k)$ прямой $\omega = \omega_0$ имеет место при $x = A_2(\omega_0) = 19.5$ (рис. 5, *a*). В интервале $-A_2 < x < A_2$ волна k_1 испытывает пространственный рост;
- (2) касание одной из ветвей графика $\omega(k)$ прямой $\omega = \omega_0$ происходит при $x = A_3(\omega_0) = 139.8$ и соответствует первой точке внутреннего отражения A_3 (рис. 5, *б*). Волна k_2 отражается от точки A_3 , превращается в волну k_4 и распространяется в противоположном направлении до точки $-A_3$, где превращается обратно в волну k_2 ;
- (3) касание второй ветви графика $\omega(k)$ прямой $\omega = \omega_0$ происходит при $x = A_4(\omega_0) = 338.3$ и соответствует второй точке внутреннего отражения A_4 (рис. 5, *в*). Волна k_1 отражается от точки A_4 , превращается в волну k_3 и распространяется в противоположном направлении до точки $-A_4$, где превращается в волну k_1 .

Альтернативным образом все точки поворота можно получить, зафиксировав значение $\omega(k, x) = \omega_0$ и разрешив уравнение $\partial\omega/\partial k = 0$ относительно x . График функции $x(k)$ и положение точек поворота показаны на рис. 4.

Заметим, что выбранная частота ω_0 не является наиболее быстро растущей и не соответствует наибольшему отрезку роста на оси x . Наиболее широкий интервал роста дает частота

$$\omega = \omega_{\max} = 4.618,$$

которой соответствуют слияние ветвей на графике $\omega(k)$ (рис. 5, *a*) и исчезновение зоны неустойчивости при увеличении x . Для частоты ω_{\max} имеем

$$A_2(\omega_{\max}) = 23.3, \quad A_3(\omega_{\max}) = 90.7, \quad A_4(\omega_{\max}) = 376.2.$$

2.3. Разностная схема для уравнения колебаний трубы с текущей жидкостью на неоднородном основании. Построим разностную схему для уравнения (2.1), которое перепишем в виде

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho_2 v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \rho_2 v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Fw = f(x, t), \tag{2.5}$$

где $F(x) = (A + Bx^2)(\rho_1 + \rho_2)$, $f(x, t)$ — добавленная в правую часть массовая сила, которая будет использоваться ниже для внесения возмущения. Введем равномерную по перемен-

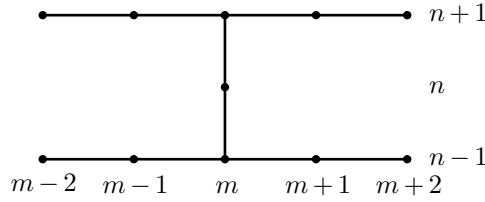


Рис. 6. Шаблон разностной схемы

ным x, t сетку

$$x_m = -\frac{L}{2} + mh, \quad m = 0, \dots, M, \quad h = \frac{L}{M}, \quad t_n = n\tau, \quad n = 0, \dots, N, \quad \tau = \frac{t_N - t_0}{N},$$

где M чётно.

Аппроксимируем производные конечными разностями с порядками $O(\tau^2)$, $O(\tau h)$, $O(h^2)$, $O(h^2)$ соответственно шаблону, показанному на рис. 6. Обозначая $w(x_m, t_n)$ через w_m^n , имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{w_m^{n+1} - 2w_m^n + w_m^{n-1}}{\tau^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} = \frac{w_{m+1}^{n+1} + w_{m-1}^{n-1} - w_{m+1}^{n-1} - w_{m-1}^{n+1}}{4\tau h},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{(w_{m-1}^{n+1} - 2w_m^{n+1} + w_{m+1}^{n+1}) + (w_{m-1}^{n-1} - 2w_m^{n-1} + w_{m+1}^{n-1})}{2h^2},$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{(w_{m-2}^{n+1} - 4w_{m-1}^{n+1} + 6w_m^{n+1} - 4w_{m+1}^{n+1} + w_{m+2}^{n+1}) + (w_{m-2}^{n-1} - 4w_{m-1}^{n-1} + 6w_m^{n-1} - 4w_{m+1}^{n-1} + w_{m+2}^{n-1})}{2h^4}.$$

Подставляя эти формулы в уравнение (2.5), получим разностные уравнения для внутренних узлов $m = 2, \dots, M - 2, n = 2, \dots, N$.

Поскольку, как сказано выше, возмущение вносится за счет массовой силы, в расчетах используются нулевые начальные условия $w_0(x) = w_1(x) = 0$. Тогда начальные и граничные условия для задачи в разностном виде имеют вид

$$w(x, 0) = w_m^0 = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{w_m^1 - w_m^0}{\tau} = 0, \quad (2.6)$$

$$w_0^{n+1} = w_N^{n+1} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=-L/2} = \frac{w_1^{n+1} - w_0^{n+1}}{h} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=L/2} = \frac{w_N^{n+1} - w_{N-1}^{n+1}}{h} = 0. \quad (2.7)$$

Поскольку, как будет видно ниже, возмущения не взаимодействуют с границами расчетной области, более низкий порядок аппроксимации граничных условий $O(h)$ не снижает порядок аппроксимации всей задачи.

Полученные уравнения на каждом временном слое образуют замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $(w_0^{n+1}, w_1^{n+1}, \dots, w_M^{n+1})^T$, которая решается методом пятидиагональной прогонки [1].

Возмущение задается локально в центре трубы дополнительной внешней массовой силой в правой части уравнения (2.5) с плотностью

$$f(x_m, t_n) = \begin{cases} \frac{0.05}{h} \sin(\omega_0 t_n) \Theta(t_n) & \text{при } m = \frac{M}{2}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\Theta(t_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } t_n < t^*, \\ 0 & \text{при } t_n \geq t^*, \end{cases} \quad t^* = 10 \frac{2\pi}{\omega_0},$$

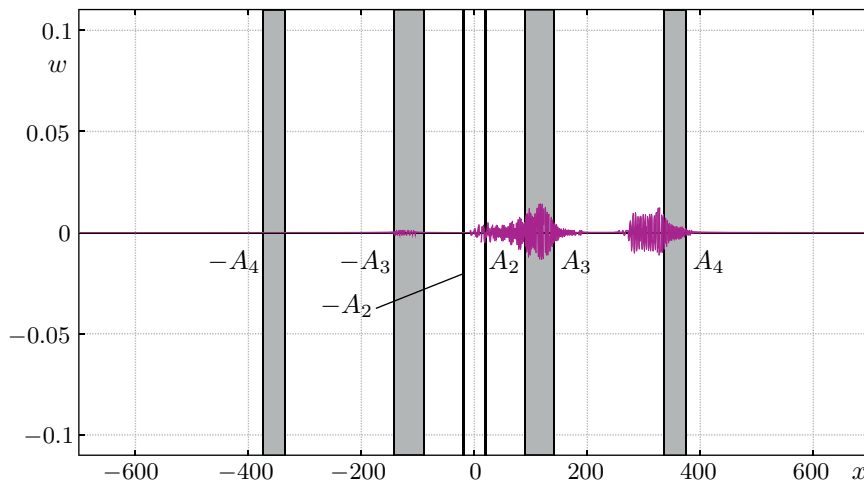


Рис. 7. Отражение от точки A_3 и от точки A_4 , $t = 59.5$. Серым показаны диапазоны расположения точек $\pm A_2(\omega)$, $\pm A_3(\omega)$, $\pm A_4(\omega)$ при $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$

т.е. задавалось синусоидальное возбуждение с частотой ω_0 , действующее в течение 10 периодов колебаний, и отключаемое после.

Компьютерная программа, решающая рассматриваемую задачу, была оттестирована на сходимость по пространственному и временному шагам и проверена на задаче по моделированию собственных частот и форм колебаний пустой однородной трубы и на задаче определения границы абсолютной/конвективной неустойчивости однородной трубы с протекающей жидкостью. Во всех случаях наблюдалось совпадение расчетов с теорией.

2.4. Результаты расчетов. В вычислениях пространственная область $[-700, 700] \ni x$ выбрана с запасом, чтобы можно было наблюдать практически полное затухание колебаний вне интервала $-A_4 < x < A_4$. Созданное возмущение, имеющее 10 периодов колебаний, в основном движется вправо, хотя имеется также возмущенная зона малой амплитуды, движущаяся влево. При выходе из зоны роста $-A_2 < x < A_2$ возмущение представляет собой “волновой поезд”, содержащий обе движущиеся вправо волны k_1 и k_2 . В расчетах наблюдается, как часть возмущения (соответствует k_2) не проходит дальше точки A_3 и отражается от нее, в то время как другая часть (соответствует k_1) проходит дальше и отражается от точки A_4 (рис. 7). Отраженные волны (соответствующие волновым числам k_4 и k_3) движутся влево и отражаются от точек $-A_3$ и $-A_4$, как и ожидалось исходя из теоретических построений.

При прохождении интервала $(-A_2, A_2)$ в расчетах в соответствии с теорией наблюдается рост возмущения. Поскольку возмущение распадается на несколько независимых “волновых поездов” и они проходят интервал роста в разные моменты времени, усиление возмущений наблюдается прерывисто: на некотором интервале времени имеется рост, затем он прекращается, затем продолжается вновь. На рис. 8 показано типичное состояние возмущенной трубы до и после отдельного временного интервала роста.

Как видно из рис. 7, 8, часть возмущения все же проходит несколько дальше положенных точек $A_3(\omega_0)$ и $A_4(\omega_0)$. Это связано с тем, что заданное локализованное возмущение с частотой ω_0 действует на конечном интервале времени $0 < t < t^*$. В нем, очевидно, доминирует частота ω_0 , но неизбежно присутствуют и другие частоты. Возмущения с большими частотами $\omega > \omega_0$ отражаются в более далекой от центра трубы точке поворота A_4 и в более близкой точке A_3 . Зависимость положения этих точек от частоты ω показана на рис. 9.

С течением времени компоненты с более высокими частотами, $\omega \sim \omega_{\max} > \omega_0$, хотя и имеют незначительную начальную амплитуду, из-за их более высокой скорости роста становятся доминирующими. В результате несколько смещается и положение точек поворота. По этой

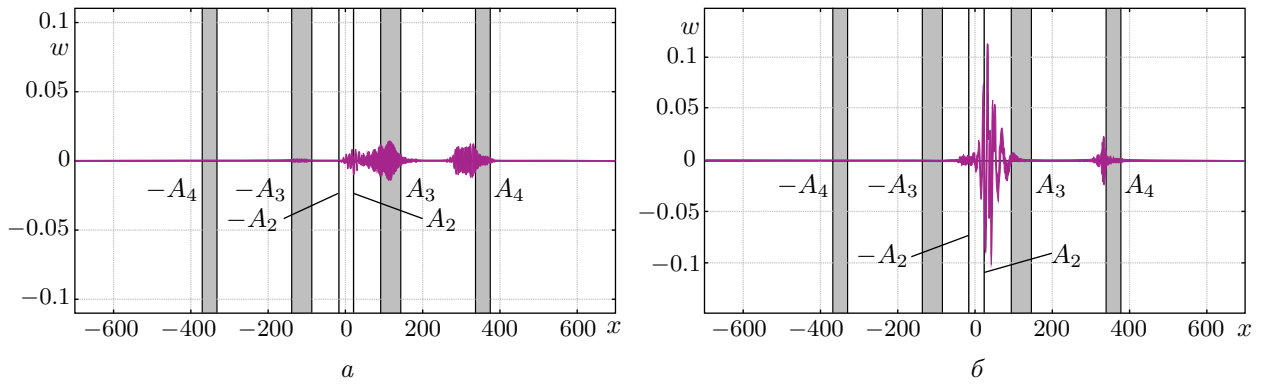


Рис. 8. Возмущение в моменты времени, соответствующие началу $t = 61$ (а) и концу $t = 73.5$ (б) отдельного периода роста возмущения

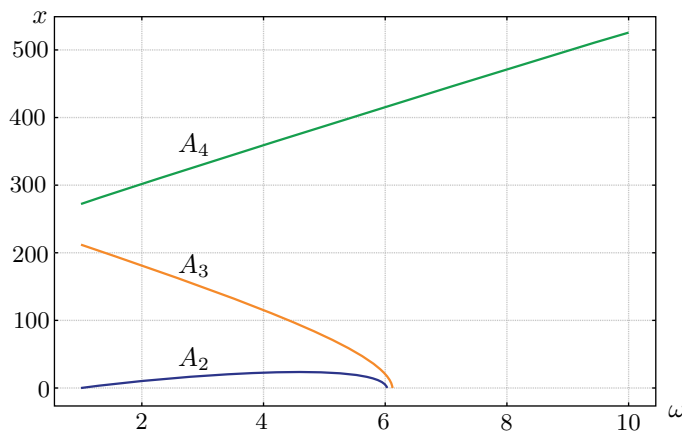


Рис. 9. Зависимости $A_2(\omega)$, $A_3(\omega)$, $A_4(\omega)$

причине на рис. 7 и далее показаны интервалы расположения точек поворота $A_3(\omega)$, $A_4(\omega)$, а также границы зоны роста $A_2(\omega)$, для диапазона частот $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$.

Тем не менее в расчетах видно, что существуют границы на оси x , за которые возмущение не выходит даже для достаточно больших t . Можно ожидать, что это обеспечивается ограниченностью начального спектра частот, имеющихся в возмущении.

Для подтверждения этой гипотезы построены дискретные спектры (полученные через дискретное преобразование Фурье) возмущения, рассчитанные на интервале $0 < t < T$, где T — интересующий нас момент времени, в точках x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$A_2 < x_1 = 100 < A_3 < x_2 = 300 < A_4 < x_3 = 380 < x_4 = 415.$$

На рис. 10 показан интересующий нас диапазон частот от 0 до 12. Рисунок 10, а по времени соответствует рис. 7. Из рис. 10, а видно, что до точки отражения A_4 (кривая, соответствующая $x_2 = 300$) в спектре присутствуют волны с частотами $\omega > \omega_0$, значит, отражаться они будут позже, чем ожидалось в $x = A_4(\omega_0) = 338.3$. Это можно наблюдать на рис. 7.

По виду спектра в момент времени $t = 360$ (рис. 10, б) можно сделать вывод о том, что с течением времени начальный спектр, в котором доминирует частота ω_0 , преобразуется к более высоким частотам $\omega \sim \omega_{\max}$, которые имеют более высокую скорость роста и поэтому становятся доминирующими. В итоговом возмущении присутствуют волны с частотами, отличными от ω_0 , вплоть до $\omega \approx 5.7$. Согласно рис. 9 возмущения с данными частотами не должны проникать далее точки $A_4 \approx 406$. В расчетах также не наблюдалось проникновение возмущений далее этой точки.

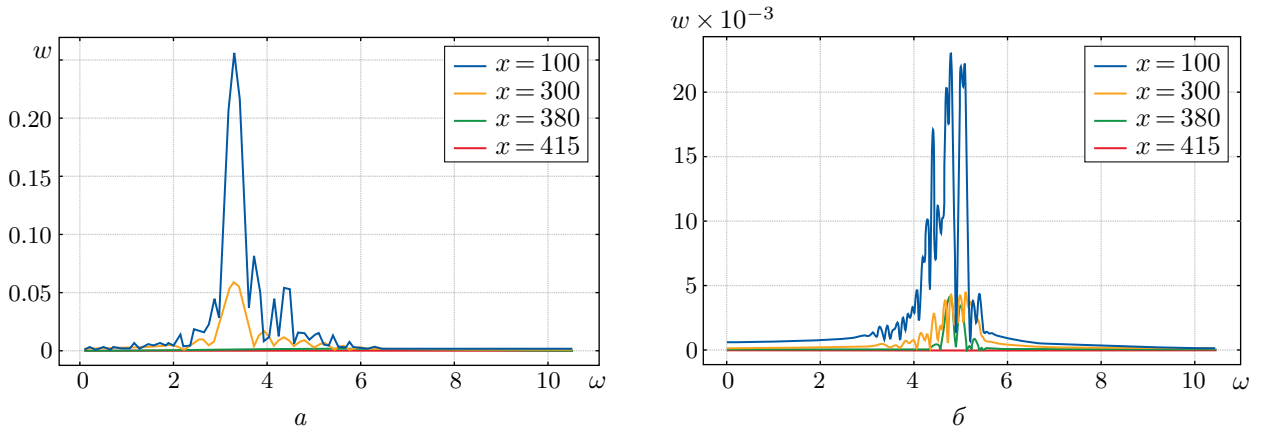


Рис. 10. Дискретный спектр в моменты времени $t = 59.5$ (а) и $t = 360$ (б)

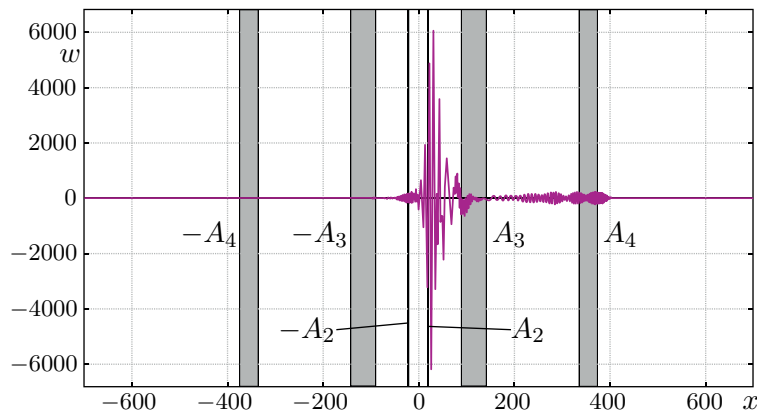


Рис. 11. Возмущение $w(x, t)$ при $t = 318.5$

Через длительный интервал времени исходное возмущение после нескольких циклов отражений и роста постепенно приобретает вид, показанный на рис. 11. Далее это возмущение почти не меняет свою форму, но неограниченно растет со временем в силу линейности задачи. Таким образом, численно рассчитанная эволюция возмущения соответствует теоретически ожидаемому поведению.

3. НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА

3.1. Постановка задачи. Поскольку в реальности возмущение не может расти неограниченно, рассмотрим дополнительное нелинейное натяжение трубы, возникающее при ее изгибе согласно модели больших прогибов Кармана [17]:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + Fw - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (3.1)$$

$$N = \frac{E}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{6D}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx,$$

где E — модуль Юнга материала трубы. Во многих случаях именно этот нелинейный член, связанный с натяжением, является доминирующим при росте амплитуды возмущения и ограничивающим ее [14, 15]. Граничные и (нулевые) начальные условия такие же, как и в линейном случае (см. (2.2), (2.3)).

3.2. Разностная схема для нелинейной задачи. Перепишем уравнение (3.1) в следующем виде:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho_2 v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (\rho_2 v^2 - N) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Fw = f(x, t), \quad (3.2)$$

$$N = \frac{6D}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad F = (A + Bx^2)(\rho_1 + \rho_2).$$

Все производные, входящие в уравнение (3.2), аппроксимируются так же, как и в п. 2.3. Для вычисления интеграла, входящего в уравнение (3.2), используем следующую квадратурную формулу:

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx = f(x_0)h + \sum_{m=1}^{M-2} \frac{f(x_m) + f(x_{m+1})}{2} h + f(x_M)h, \quad f(x_i) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x_i) \right)^2.$$

Здесь

$$f(x_0) = \left(\frac{w_1 - w_0}{h} \right)^2, \quad f(x_M) = \left(\frac{w_M - w_{M-1}}{h} \right)^2$$

— разности вперед и назад соответственно, аппроксимирующие подынтегральные функции с порядком $O(h)$,

$$f(x_m) = \left(\frac{w_{m-1} - w_{m+1}}{2h} \right)^2, \quad m = 1, \dots, N-1,$$

— центральная разность, аппроксимирующая подынтегральную функцию с порядком $O(h^2)$. Тогда

$$N = \frac{6D}{L} \left[\frac{(w_1 - w_0)^2}{h} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N-2} \left(\frac{(w_{m-1} - w_{m+1})^2}{4h} + \frac{(w_m - w_{m+2})^2}{4h} \right) + \frac{(w_N - w_{N-1})^2}{h} \right]. \quad (3.3)$$

Значение N в разностных уравнениях вычислялось на промежуточном, n -м, временном слое, в результате чего решение алгебраической задачи на $(n+1)$ -м слое не отличается от линейного случая.

Начальные (2.6) и граничные (2.7) условия, а также способ внесения возмущения (2.8) для нелинейной задачи такие же, как и в линейном случае. Заметим, что, поскольку в силу граничных условий мы имеем $f(x_0) = f(x_m) = 0$, аппроксимация подынтегрального выражения в N (3.3) фактически имеет порядок $O(h^2)$.

3.3. Результаты расчетов. Результаты расчета нелинейной задачи в первые моменты времени, пока амплитуда остается малой, практически не отличаются от линейной задачи. Так, на рис. 12 и 13 показаны возмущения в те же моменты времени, что и для линейной задачи (рис. 7, 8). Можно видеть, что они практически идентичны.

Существенные различия наблюдаются после продолжительного времени моделирования, $t > 126$, когда амплитуда достигает 1 и выше. С этого момента времени амплитуда возмущения в нелинейном случае значительно меньше, чем в линейном, а скорость ее роста со временем стремится к нулю. С течением времени амплитуда достигает величины порядка 1 во всех точках $-A_4 < x < A_4$, что разительно отличается от линейной задачи (рис. 11), где максимум амплитуды лежит вблизи правой границы интервала роста $(-A_2, A_2)$. В колебаниях

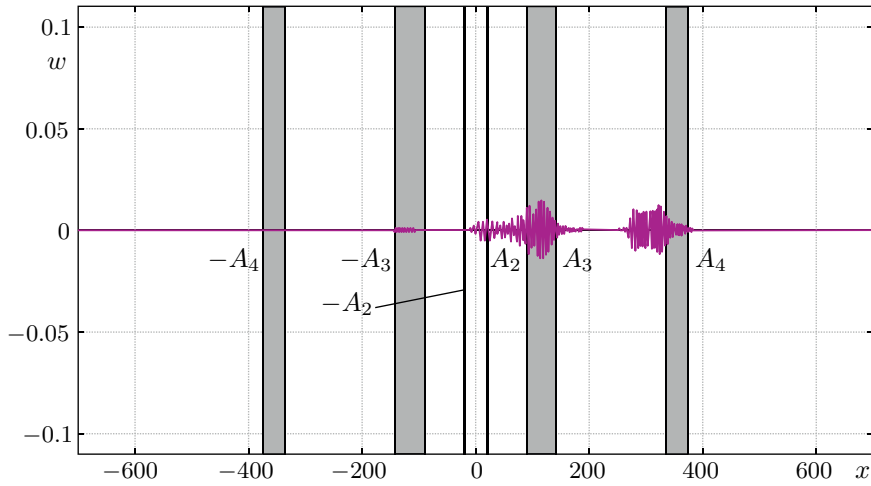


Рис. 12. Отражение от точки A_3 и от точки A_4 в нелинейной задаче ($t = 59.5$)

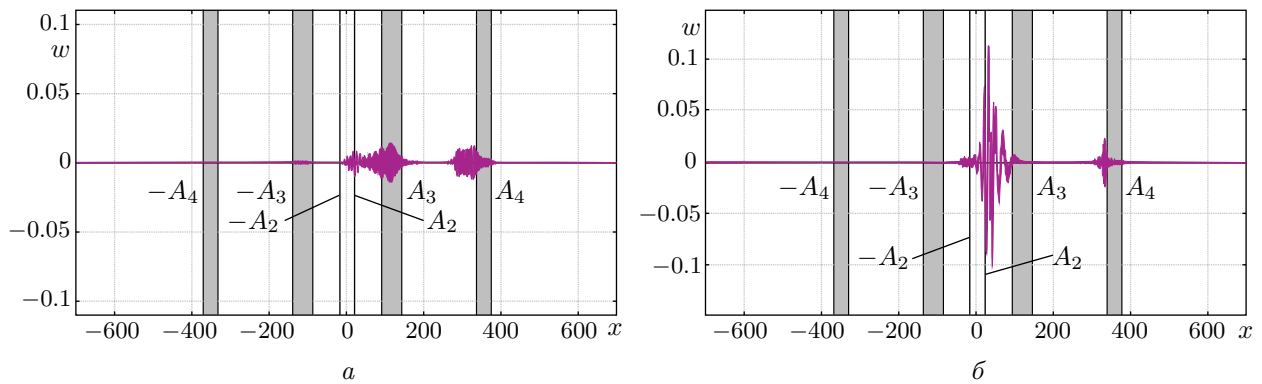


Рис. 13. Начало $t = 61$ (а) и конец $t = 73.5$ (б) роста возмущения в нелинейной задаче

становится трудно визуально выделить регулярную компоненту, движение становится квази-хаотическим. Расчет нелинейной задачи производился до $t = 3000$, что существенно дольше, чем в линейном случае ($t = 360$). Динамика развития возмущения в последние моменты времени расчетов показана на рис. 14, где видно, что даже после столь долгого времени развития величина прогиба трубы не превышает 3. Интересно отметить, что даже в нелинейном случае возмущение не покидает интервал $-A_4 < x < A_4$ (с учетом зависимости $A_4(\omega)$), а в интервале $-A_3 < x < A_3$ амплитуда выше, чем вне него, т.е. точки внутреннего отражения сохраняют свою функцию и в нелинейном случае.

Для нелинейной задачи на рис. 15 для полного временного диапазона построены спектр и автокорреляционная функция возмущения в тех же точках, что и в п. 2.4. Видно, что в спектре существенно присутствует весь диапазон частот от 0 до 6.5. При этом доминирующая частота в центре трубы ниже, а вдали от центра выше, чем исходно внесенная частота возмущения. За расширение диапазона участвующих в возмущении частот (по сравнению с наблюдавшимся в линейной задаче диапазоном $\omega_0 < \omega < \omega_{\max}$) и перераспределение спектральных амплитуд ответствен нелинейный член в (3.1), (3.2).

По виду автокорреляционной функции (рис. 15, б) можно сделать вывод о том, что происходит ее медленное убывание. Отсюда можно заключить, что регулярная компонента возмущения постепенно исчезает и происходит нарастание квазихаотического характера колебаний, что соответствует визуальному наблюдению процесса колебаний.

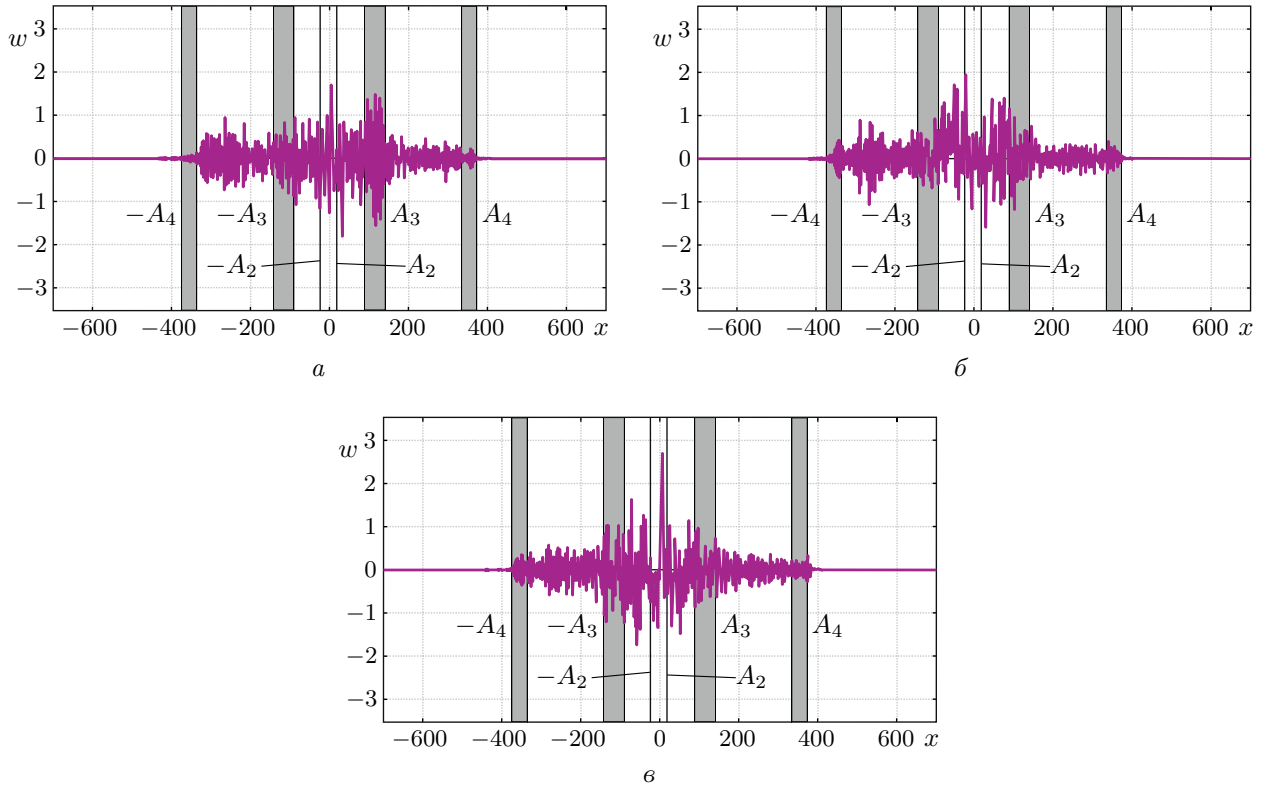


Рис. 14. Вид возмущения в моменты времени $t = 2940$ (а), 2970 (б), 3000 (в)

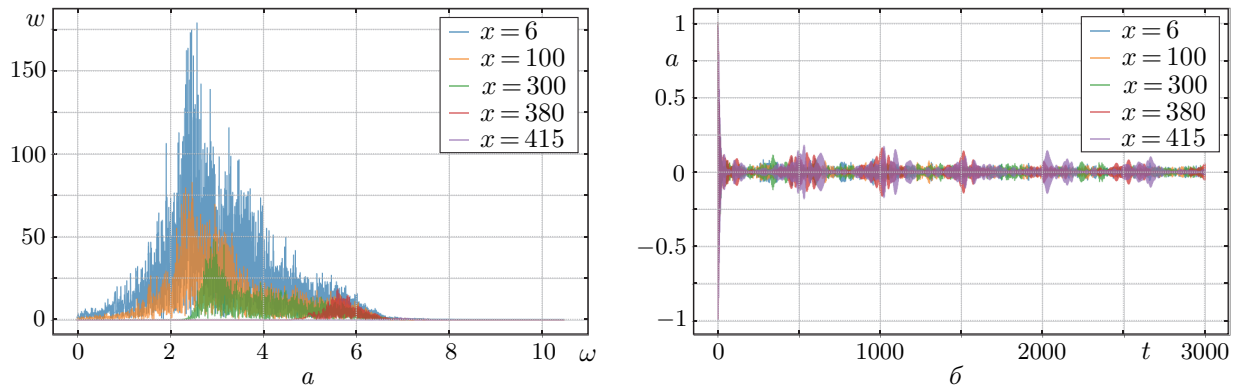


Рис. 15. Возмущение в различных точках: а — спектр; б — автокорреляционная функция

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено численное моделирование распространения возмущения в длинной трубе, лежащей на неоднородном упругом основании и заполненной движущейся жидкостью. При этом функция, описывающая зависимость волнового числа от частоты, имеет точки ветвления, определяющие область неустойчивости и точки внутренних отражений в трубе [6]. Результат расчета линейной задачи верно воспроизводит процесс развития внесенного возмущения в такой системе, изученный ранее аналитически [6]. А именно, наблюдаются основные зоны пространства, определяющие структуру растущей собственной функции, — как интервал роста возмущения, так и точки внутреннего отражения.

Численно решена нелинейная задача, в которой учтено доминирующее нелинейное натяжение трубы, вызванное ее изгибом. Результаты расчетов показывают, что, хотя на начальном

участке роста возмущение растет идентично линейной задаче, при достижении амплитуды порядка 1 из-за влияния нелинейности происходит остановка усиления колебаний. Анализ характера колебаний, спектра и автокорреляционной функции показывает, что с течением времени происходит затухание регулярных компонент возмущения и возникает постепенное доминирование квазихаотических колебаний, при этом на всем интервале $-A_4 < x < A_4$ амплитуды прогибов трубы приобретают один порядок. Нелинейно развивающееся возмущение внутри интервала $-A_3 < x < A_3$ имеет более высокую амплитуду, чем при $-A_4 < x < -A_3$ и $A_3 < x < A_4$, а вне интервала $-A_4 < x < A_4$ возмущение экспоненциально затухает при удалении от него. Таким образом, точки внутреннего отражения не меняют положения и сохраняют свою функцию в нелинейном случае. Другими словами, хотя возмущение в нелинейном случае развивается существенно иначе, его границы определяются линеаризованной задачей.

Как было указано во введении, ранее при изучении линейных систем второго порядка по x (т.е. с двумя пространственными волнами) с переменными коэффициентами было доказано, что необходимым условием существования растущей линейной глобальной собственной функции является наличие зоны локальной абсолютной неустойчивости [2, 8]. Аналогичный результат получен для полубесконечной задачи в области $x > 0$ (см. [4]). В этой части результаты работы [6], подтвержденные в настоящей работе численно, показывают, что данное утверждение, вообще говоря, неверно при наличии более чем двух пространственных волн. По сути рассматриваемая здесь задача является контрпримером: существует растущая глобальная собственная мода, однако локальной абсолютной неустойчивости нет ни в одной точке.

Иной вывод можно сделать в случае с нелинейными собственными модами. Для систем второго порядка на основе модельного уравнения Гинзбурга–Ландау ранее были изучены структуры нелинейных глобальных собственных мод. Выделены “плавные” (soft) моды [11], в которых амплитуда меняется медленно в зависимости от координаты, и “крутые” (steep) моды [13], в которых на одном из фронтов, определяемом границей линейной абсолютной/конвективной неустойчивости, происходит быстрый рост амплитуды. “Плавные” нелинейные моды суть результат развития глобальных растущих линейных собственных мод, в то время как “крутые” моды могут возникать и при отсутствии глобальной линейной неустойчивости [12]. Аналогичная по структуре глобальная собственная мода построена в случае полубесконечной области $x > 0$ (см. [4]) на основе того же модельного уравнения.

Важной особенностью рассмотренной в указанных работах нелинейности является ее локальный характер, что позволило получить нелинейное локальное дисперсионное уравнение и с применением обобщения метода ВКБ построить асимптотические структуры глобальных нелинейных собственных мод. Во всех случаях оказалось, что граница зоны, занятой собственной модой, определяется чисто линейными свойствами задачи. Другими словами, нелинейные эффекты проявляются внутри развивающегося возмущения вплоть до насыщения (прекращения роста), но не сказываются на его границах. В настоящей работе получен совершенно такой же результат: развившееся нелинейное возмущение, даже после перехода в квазихаотический режим, не покидает области $-A_4 < x < A_4$, определяемой линейной задачей, а в области $-A_3 < x < A_3$, на границах которой в линейном случае происходит частичное отражение волн, имеет более высокую амплитуду. При этом рассмотренная в настоящей работе нелинейность существенно нелокальная (интегрально зависит от деформации трубы на всей ее длине), поэтому аналитические построения, аналогичные [4, 11–13], в данном случае невозможны в принципе. Данное обстоятельство позволяет предположить, что определенность фронтов нелинейного развившегося возмущения только линейной задачей является существенно более общим свойством, чем в условиях работ [4, 11–13].

Благодарности. Авторы благодарят А.Г. Куликовского за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В. Численные методы: Решения задач и упражнения. М.: Дрофа, 2009.
2. Chomaz J.-M., Huerre P., Redekopp L.G. A frequency selection criterion in spatially developing flows // Stud. Appl. Math. 1991. V. 84, N 2. P. 119–144.
3. Coenen W., Lesshaft L., Garnaud X., Sevilla A. Global instability of low-density jets // J. Fluid Mech. 2017. V. 820. P. 187–207.
4. Couaïron A., Chomaz J.-M. Fully nonlinear global modes in slowly varying flows // Phys. Fluids. 1999. V. 11, N 12. P. 3688–3703.
5. Феодосьев В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. 1951. Т. 10. С. 169–170.
6. Куликовский А.Г. О потере устойчивости слабо неоднородными течениями в протяженных областях. Возникновение поперечных колебаний трубы с текущей в ней жидкостью // ПММ. 1993. Т. 57, №5. С. 93–99.
7. Куликовский А.Г., Шикина И.С. Об изгибных колебаниях длинной трубы, заполненной движущейся жидкостью // Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41, №1. С. 31–39.
8. Le Dizès S., Huerre P., Chomaz J.-M., Monkewitz P.A. Linear global modes in spatially developing media // Philos. Trans. R. Soc. London A. 1996. V. 354, N 1705. P. 169–212.
9. Monkewitz P.A. The absolute and convective nature of instability in two-dimensional wakes at low Reynolds numbers // Phys. Fluids. 1988. V. 31, N 5. P. 999–1006.
10. Pier B. On the frequency selection of finite-amplitude vortex shedding in the cylinder wake // J. Fluid Mech. 2002. V. 458. P. 407–417.
11. Pier B., Huerre P. Fully nonlinear global modes in spatially developing media // Physica D. 1996. V. 97, N 1–3. P. 206–222.
12. Pier B., Huerre P., Chomaz J.-M. Bifurcation to fully nonlinear synchronized structures in slowly varying media // Physica D. 2001. V. 148, N 1–2. P. 49–96.
13. Pier B., Huerre P., Chomaz J.-M., Couaïron A. Steep nonlinear global modes in spatially developing media // Phys. Fluids. 1998. V. 10, N 10. P. 2433–2435.
14. Shishaeva A., Aksenov A., Vedenev V. The effect of external perturbations on nonlinear panel flutter at low supersonic speed // J. Fluids Struct. 2022. V. 111. Pap. 103570.
15. Веденев В.В. Предельные циклы колебаний при одномодовом флаттере пластины // ПММ. 2013. Т. 77, №3. С. 355–370.
16. Веденев В.В., Порошина А.Б. Устойчивость упругой трубки, содержащей текущую неньютоновскую жидкость и имеющей локально ослабленный участок // Тр. МИАН. 2018. Т. 300. С. 42–64.
17. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.