

УДК 532.5.01

О НАПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЯ БЕГУЩИХ ВОЛН¹⁾© 2025 г. В. В. Веденеев^{1,*}¹ 119333 Москва, ул. Губкина, 8, МИАН им. В.А. Стеклова РАН, Россия

*e-mail: vasily@vedeneev.ru

Поступила в редакцию 27.10.2024 г.

Переработанный вариант 01.11.2024 г.

Принята к публикации 25.02.2025 г.

В ряде задач, связанных с пространственным распространением волн, необходимо различать волны, движущиеся в одну и в другую стороны. Примерами таких задач являются распространение волн из точечного пульсирующего источника; задача о пространственных оптимальных возмущениях; задача об определении абсолютного или конвективного характера неустойчивости и др. Кроме того, при расчете движения волн в неоднородной среде маршевыми методами для численной стабилизации используется проектирование решения на пространство распространяющихся в одном направлении волн, для чего также необходим их корректный отсев. Общепринятыми в литературе индикаторами направления движения волны являются критерий Бриггса, вытекающий из принципа причинности, и — в некоторых работах — знак групповой скорости. В настоящей статье обсуждаются их интерпретации и связь между ними. Приводятся примеры, когда идентификация направления волны по знаку групповой скорости является ошибочной и приводит к качественно неверным результатам. Впервые рассмотрен случай, когда прямое применение критерия Бриггса невозможно из-за поглощения дискретной моды, описывающей волну, непрерывным спектром. Дано обобщение критерия Бриггса на этот случай и приведены примеры его применения. Библ. 24. Фиг. 13.

Ключевые слова: бегущая волна, фазовая скорость, групповая скорость, критерий Бриггса, непрерывный спектр.

DOI: 10.31857/S0044466925050015, EDN: IFZODU

1. ВВЕДЕНИЕ

В одномерной теории волн, т.е. решений линеаризованных уравнений, имеющих вид $\sim e^{i(kx-\omega t)}$, важным является вопрос о том, в какую сторону движется та или иная волна. Например, при решении задачи о гармонически колеблющемся источнике, расположенном в точке $x = 0$ на однородном фоне для системы, в которой для каждой частоты ω существует N решений дисперсионного уравнения $k_n(\omega)$, решение с одной и с другой стороны от источника имеет вид

$$\sum_n A_n e^{i(k_n(\omega)x - \omega t)}, \quad (1.1)$$

где слева от источника сумма берется только по волнам, двигающимся влево, а справа от него — по волнам, двигающимся вправо.

Если рассматриваемая система полубесконечна, т.е. определена при $x \geq 0$, то в такой системе не могут распространяться волны, двигающиеся влево; другими словами, в общем решении (1.1) также необходимо оставить только уходящие от границы волны, при этом число граничных условий, ставящихся на этой границе, должно быть равно числу уходящих от нее волн [1].

Аналогично, в задачах о пространственных оптимальных возмущениях в полубесконечных системах, определенных при $x \geq 0$ — таких как пограничные слои [2], течение в трубе [3], затопленные струи [4–6] и т.д., для математической корректности и физической адекватности задачи необходимо в разложении (1.1) оставлять только движущиеся вправо волны.

При исследовании распространения возмущений на неоднородном фоне — например, развитие волны Толлмина–Шлихтинга в нарастающем на теле пограничном слое — применяются параболизированные уравнения Навье–Стокса [7, § 7.4.3], также связанные с выделением волн, распространяющихся вниз по потоку. Более современная концепция, устраняющая известные численные проблемы параболизированных уравнений, заключается в построении односторонних уравнений Навье–Стокса, при этом происходит “удаление” из системы

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-71-30012).

движущихся против потока волн [8, 9]. Несколько другой подход, названный спектральной редукцией, использовался в работе [10]: возмущение на каждом пространственном шаге при движении вниз по потоку проектировалось на подпространство собственных мод, соответствующих движущимся вниз по потоку волнам. При этом крайне важно физически обоснованно отобрать моды, включаемые в данное подпространство. Сравнение различных подходов к вычислению развивающихся в пространстве возмущений приведено в работе [11].

Другим примером задач, где важно идентифицировать направление движения волны, является задача об абсолютной и конвективной неустойчивости. Ее решение сводится к поиску седловых точек функции $\omega(k)$, или, что то же самое, точек ветвления обратной функции $k(\omega)$. При этом вклад в асимптотику возмущений дают только такие точки, в которых происходит ветвление волновых чисел, соответствующих движущимся в противоположные стороны волнам [12, §7.4].

Таким образом, в целом ряде задач требуется разделять спектр пространственных волн $e^{i(k_n x - \omega t)}$, $n = 1, \dots, N$, на движущиеся вправо и движущиеся влево волны. Однако вопрос о методе такого разделения далеко не очевиден. В общем случае комплексная частота и волновое число связаны дисперсионным соотношением

$$F(k, \omega) = 0, \quad (1.2)$$

которое может иметь весьма сложную структуру; как следствие, его корни $k_n(\omega)$ могут иметь точки ветвления и разрезы, так что одна “волна” превращается в другую “волну” при непрерывном изменении частоты и переходе на другой лист римановой поверхности. В связи с этим само понятие отдельной “волны” должно быть конкретизировано выделением однозначных листов римановой поверхности. Более того, запись (1.2) может не иметь алгебраического вида: например, в задачах гидродинамической устойчивости спектр $k_n(\omega)$ может иметь счетное или непрерывное подмножество. Поэтому важно иметь универсальный индикатор направления движения волн, не зависящий от конкретной природы задачи.

Для определенности далее под отдельной пространственной “волной”, или “модой” будем подразумевать однозначную функцию $k_n(\omega)$, определенную на всей комплексной плоскости ω , за исключением, возможно, изолированных особенностей и разрезов, а также описываемое ей движение, имеющее вид $e^{i(k_n(\omega)x - \omega t)}$. Сформулируем, что ниже будет пониматься под “направлением движения волны”. Пусть в систему, покоящуюся в момент времени $t = 0$, вносится внешнее возмущение в виде локализованного в пространстве и гармонического по времени источника. Тогда вправо и влево от источника начнут распространяться возмущения в виде линейной комбинации волн. Те волны, которые войдут в решение задачи справа от источника, будем называть распространяющимися вправо; те, которые войдут в решение слева — распространяющимися влево. Отметим, что направление движения волны в физически адекватной и математически корректно поставленной задаче не должно зависеть от частоты, т.е. оно является свойством волны в целом.

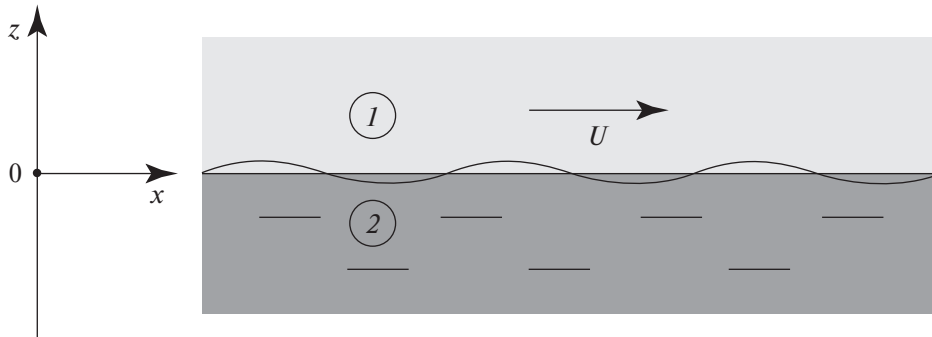
Ниже в разд. 2 рассматриваются известные в литературе “наивные” подходы к идентификации направления движения волны — фазовая и групповая скорость — и показывается их несостоятельность. В разд. 3 за основу принимается физически обоснованный способ идентификации направления волн — принцип причинности, — который приводит к т.н. критерию Бриггса направления движения волны. Анализируются его связь с “наивными” индикаторами направления. На примере задачи о ветровых волнах на воде, допускающей аналитическое решение, обсуждается ситуация, когда критерий Бриггса не совпадает ни с одним из “наивных” индикаторов, а также исследуется ситуация, когда прямое применение принципа причинности невозможно из-за “исчезновения” некоторых мод при изменении частоты. Выводится обобщение критерия Бриггса на этот случай. В разд. 4 рассматривается задача о гидродинамической устойчивости затопленной струи, в которой присутствуют оба “контринтуитивных” поведения волн: неправильная индикация направления движения волны фазовой и групповой скоростью и исчезающие моды. В разд. 5 кратко формулируются результаты работы.

2. “НАИВНЫЕ” ИНДИКАТОРЫ НАПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВОЛН

2.1. Фазовая скорость

Самой простой характеристикой бегущей волны $e^{i(kx - \omega t)}$, заданной волновым числом k и частотой ω (в общем случае комплексными) является ее фазовая скорость $c = \omega/k$. Если волновое число k вещественно, то $\text{Re } c$ совпадает со скоростью движения “гребней” волны, а $\text{Im } c$ отвечает за усиление и затухание амплитуды волны. На первый взгляд естественно принять знак $\text{Re } c$ — т.е. направление движения гребней и впадин волны — за критерий направления ее движения в целом.

Однако нетрудно понять, что такой критерий не универсален. Рассмотрим в качестве примера модель ветра над поверхностью жидкости: слой идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины, над которым движется более легкая идеальная несжимаемая жидкость (фиг. 1). Учитывается действие силы тяжести и поперечное натяжение границы раздела. Дисперсионное уравнение, описывающее волны на границе раздела



Фиг. 1. Волны на поверхности тяжелой жидкости, над которой движется более легкая жидкость.

двух сред, записывается в виде (см. [13, гл. 8, § 13])

$$\rho_1(\omega - Uk)^2 + \rho_2\omega^2 = (\rho_2 - \rho_1)g|k| + N|k|^3,$$

где ρ_i — плотности сред, U — скорость “ветра”, g — ускорение силы тяжести, N — коэффициент поверхностного натяжения. Выбирая ρ_1, g, N в качестве размерно-независимых переменных, перепишем это уравнение в безразмерной форме, которая используется в последующем анализе, в виде

$$(\omega - Uk)^2 + \varkappa\omega^2 = (\varkappa - 1)|k| + |k|^3, \quad (2.1)$$

где $\varkappa = \rho_2/\rho_1 > 1$, обозначения остальных безразмерных переменных сохранены.

Дисперсионное уравнение (2.1) получено для вещественных значений k , однако, может быть аналитически продолжено на всю комплексную плоскость k , если под знаком модуля понимать следующее:

$$|k| = \begin{cases} k, & \text{если } \operatorname{Re} k \geq 0; \\ -k, & \text{если } \operatorname{Re} k < 0. \end{cases}$$

Данное продолжение диктуется условием затухания возмущений при удалении от границы раздела сред, т.е. при $|z| \rightarrow \infty$. Линия $\operatorname{Re} k = 0$ является разрезом комплексной плоскости k . Именно так будет ниже пониматься символ модуля при рассмотрении комплексных значений k .

Рассмотрим временную задачу устойчивости, т.е. найдем решения (2.1) $\omega(k)$, или, эквивалентно, $c(k)$:

$$c_{\pm}(k) = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\varkappa + 1} \left(U \pm \sqrt{U^2 + (\varkappa + 1) \left(\frac{\varkappa - 1}{|k|} + |k| - U^2 \right)} \right). \quad (2.2)$$

Для каждого волнового числа k существуют две волны с фазовыми скоростями $c(k)$. Если при $k \in \mathbb{R}$ подкоренное выражение положительно, обе волны нейтрально устойчивы; в противном случае для одной из волн $\operatorname{Im} c(k) > 0$, т.е. найдется волновое число $k \in \mathbb{R}$, такое что $\operatorname{Im} \omega > 0$; такая волна является растущей. Неустойчивость, т.е. наличие растущих волн, возникает при $U > U_{cr}$, где

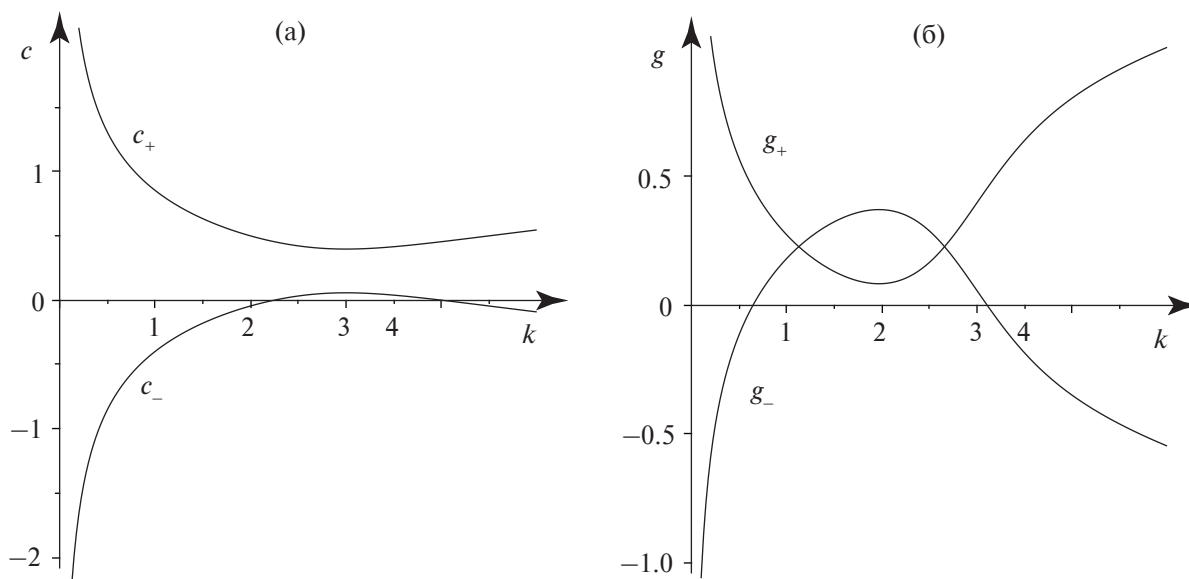
$$U_{cr} = \sqrt{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa} \min_k \left(\frac{\varkappa - 1}{|k|} + |k| \right)} = \sqrt{2 \frac{\varkappa + 1}{\varkappa} \sqrt{\varkappa - 1}}. \quad (2.3)$$

Далее ограничимся случаем $U < U_{cr}$, когда рассматриваемая система устойчива. Нетрудно заметить, что из двух волн фазовая скорость одной всегда направлена вправо, т.е. $c_+(k) > 0$ — она соответствует знаку “плюс” в (2.2). Однако направление фазовой скорости второй волны зависит от скорости ветра U . А именно, при $U < U_{c0}$ она направлена влево, т.е. $c_-(k) < 0$, но при $U_{c0} < U < U_{cr}$, где

$$U_{c0} = U_{cr} \left(1 + \frac{1}{\varkappa} \right)^{-1/2},$$

существует диапазон k , таких что $c_-(k) > 0$. Этот диапазон k включает значение $k = \sqrt{\varkappa - 1}$, при котором достигается минимум выражения (2.3). Пример зависимости $c(k)$ показан на фиг. 2а для параметров

$$\varkappa = 10, \quad U = 2.5. \quad (2.4)$$



Фиг. 2. Зависимость фазовой (а) и групповой (б) скорости от вещественного волнового числа для дисперсионного уравнения (2.1).

Данному значению \varkappa соответствует $U_{c0} \approx 2.449$, $U_{cr} \approx 2.569$.

Таким образом, при непрерывном изменении скорости ветра гребни волны, движущейся влево, разворачиваются, и начинают двигаться вправо. Следовательно, направление движения гребней волны, т.е. $\text{sign Re } c$, несостоятельно для идентификации направления движения волны в целом в смысле, определенном в разд. 1.

2.2. Групповая скорость

Групповая скорость определяется как

$$g(k) = \frac{d\omega(k)}{dk}$$

и описывает скорость движения локализованного волнового пакета (“группы волн”) [14, § 67]. Поскольку локализованные источники могут рассматриваться как отдельные “сигналы”, групповая скорость обычно интерпретируется как скорость переноса информации в системе. При этом в силу дисперсии волн в общем случае $g(k) \neq c(k)$; более того, групповая и фазовая скорости могут, вообще говоря, иметь противоположный знак.

Часто в литературе именно знак групповой скорости рассматривается как индикатор направления волны [7, § 7.1]. На первый взгляд это выглядит логично: движение импульсного сигнала должно быть связано с движением волны в целом. Однако групповая скорость, так же как и фазовая, может сменить направление при непрерывном изменении частоты или параметров задачи. А именно, в рассмотренном выше примере групповая скорость вычисляется явно с использованием (2.2) как $g(k) = d(c(k)k)/dk$. По качественному виду графика $c(k)$ можно построить качественный вид графика $g(k)$, откуда очевидно изменение направления групповой скорости при скорости $U_{g0} < U_{c0}$. Пример показан на фиг. 2б для параметров (2.4), в этом случае $U_{g0} \approx 2.115$.

Ниже будет показано, что идентификация направления движения волны по групповой скорости корректна лишь для анализа наиболее быстро растущей волны, однако, в произвольном случае может быть ошибочной.

3. ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ И КРИТЕРИЙ БРИГГСА

Сформулируем принцип причинности, которому должна удовлетворять любая корректная *линейная* математическая модель, описывающая поведение малых возмущений в реальных физических процессах: никакое возмущение физической системы не может вырасти бесконечно быстро за конечное время. Другими словами, задание возмущения в определенной области пространства не может послужить причиной бесконечного роста в этой или каких-либо иных областях пространства. Если такой рост имеет место, то он должен быть вызван какими-либо иными причинами — например, приходящими из бесконечности волнами. С точки зрения адекватной математической постановки физической задачи не должны существовать решения, причиной которых не является внесенное в систему возмущение, т.е., приходящие волны должны быть исключены.

Например, в задачах излучения акустических волн, описываемых волновым уравнением, обычно ставится “условие излучения” — выделение на бесконечности одной из двух волн — “уходящей” от места возникновения возмущения — той, групповая скорость которой направлена от источника. Можно показать, что данное условие для волнового уравнения является частным случаем общего критерия Бриггса определения направления распространения волны.

Для систем, удовлетворяющих принципу причинности, немедленно следует корректность соответствующей математической задачи по Петровскому [15]. А именно, поскольку возмущения не могут расти неограниченно быстро, то должен существовать максимум инкремента бегущих волн $M = \max_{k \in \mathbb{R}} \operatorname{Im} \omega(k) < \infty$, где $\omega(k)$ — решения дисперсионного уравнения. В противном случае существовали бы возмущения, растущие бесконечно быстро, т.е. система бы “взрывалась”. Примеры задач, не удовлетворяющих условию корректности хорошо известны — например, тангенциальный разрыв между двумя несжимаемыми жидкостями, в котором рост коротких волн неограничен, но который подавляется при учете поверхностного натяжения границы раздела сред.

Оказывается, что естественного требования причинности достаточно для получения физически обоснованного критерия направления движения волны [16, § 2.3].

3.1. Решение задачи Коши и критерий Бриггса

Не конкретизируя пока рассматриваемую физическую систему, рассмотрим “задачу об источнике”: пусть в некоторой локализованной области пространства имеется внешнее воздействие, действующее по гармоническому закону с частотой $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Будем решать задачу Коши, которая позволит определить составляющие возмущений, расходящихся от источника влева и вправо. Излагаемая ниже схема решения задачи в основном соответствует [16, § 2.3] и [17].

Пусть имеется n переменных $u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)$, описывающих состояние системы, а линеаризованная система уравнений для возмущений имеет общий вид

$$\begin{aligned} P_{11}u_1 + P_{12}u_2 + \dots + P_{1n}u_n &= f_1 \delta(x) e^{-i\omega_0 t} H(t), \\ P_{21}u_1 + P_{22}u_2 + \dots + P_{2n}u_n &= f_2 \delta(x) e^{-i\omega_0 t} H(t), \\ &\dots\dots\dots \\ P_{n1}u_1 + P_{n2}u_2 + \dots + P_{nn}u_n &= f_n \delta(x) e^{-i\omega_0 t} H(t), \end{aligned}$$

где $P_{ij} = P_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right)$ — многочлены относительно $\partial/\partial x, \partial/\partial t$, f_i — амплитуды внешней силы, $\delta(x)$ — дельта-функция, $H(t)$ — функция Хэвисайда. Данная система может включать производные и по другим направлениям — например, в случае волн на поверхности жидкости (фиг. 1) или в случае пограничного слоя вязкой жидкости на пластине присутствуют производные по перпендикулярному направлению $\partial/\partial z$. Возбуждающая сила в таком случае считается локализованной по всем направлениям.

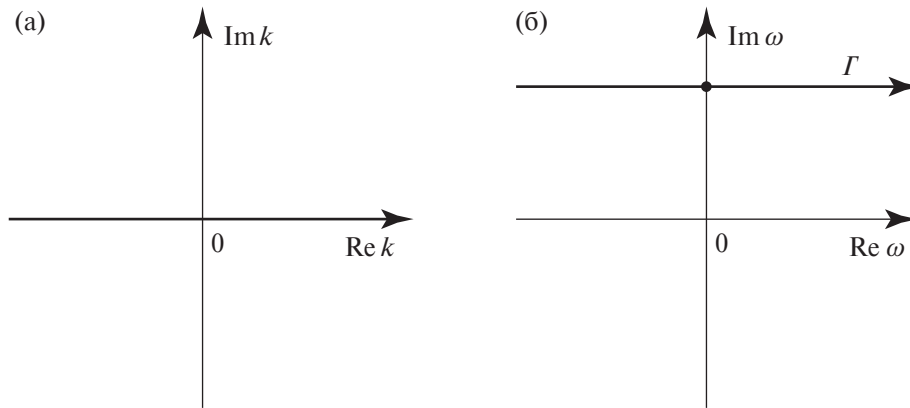
Пусть в начальный момент времени заданы нулевые начальные условия:

$$u_i(x, 0) = 0;$$

если система уравнений имеет более, чем первый порядок по времени, то соответствующие производные также заданы нулевыми. Таким образом, полученное ниже решение соответствует только возбуждению источником.

Применим к системе уравнений сначала преобразование Фурье по координате x , и затем преобразование Лапласа по времени t . Параметр преобразования Фурье обозначим k , при этом для более удобной физической интерпретации полученных ниже результатов в качестве параметра преобразования Лапласа будем использовать не стандартный параметр s , а $\omega = is$. Получим

$$\begin{aligned} P_{11}U_1 + P_{12}U_2 + \dots + P_{1n}U_n &= \frac{f_1}{-\sqrt{2\pi i}(\omega - \omega_0)}, \\ P_{21}U_1 + P_{22}U_2 + \dots + P_{2n}U_n &= \frac{f_2}{-\sqrt{2\pi i}(\omega - \omega_0)}, \\ &\dots\dots\dots \\ P_{n1}U_1 + P_{n2}U_2 + \dots + P_{nn}U_n &= \frac{f_n}{-\sqrt{2\pi i}(\omega - \omega_0)}, \end{aligned} \tag{3.1}$$



Фиг. 3. Путь интегрирования обратного преобразования Фурье (а) и Лапласа (б).

где $P_{ij} = P_{ij}(ik, -i\omega)$, $U_i(k, \omega)$ — преобразованные неизвестные. В случае если исходная система не была чисто одномерной, т.е. включала производные по другим координатам, то будем считать, что в преобразованных величинах дифференциальная задача по другим направлениям может быть решена (возможно, неединственным образом, если по поперечным направлениям существует несколько собственных мод).

Например, в случае волн на поверхности жидкости (фиг. 1) требуется затухание возмущений при $z \rightarrow \pm\infty$, откуда следует, что преобразованные неизвестные при $k \in \mathbb{R}$ зависят от z как $e^{-|k|z}$ при $z \rightarrow +\infty$ и $e^{|k|z}$ при $z \rightarrow -\infty$. Удовлетворение граничным условиям при $z = 0$ позволяет избавиться от переменной z для преобразованных переменных U_i .

Таким образом, поперечные переменные в (3.1) можно считать исключенными. Однако P_{ij} уже, вообще говоря, не будет полиномиальной функцией: так, наличие $|k|$ в зависимостях от z порождает разрез при выделении однозначной ветви $|k|$ вдоль прямой $\text{Re } k = 0$ и, как будет видно ниже, приведет к возникновению непрерывного спектра в решении.

Решение полученной неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (3.1) можно записать в виде формул Крамера

$$U_j(k, \omega) = \frac{\mathcal{D}_j(k, \omega)}{\mathcal{D}(k, \omega)}, \tag{3.2}$$

где

$$\mathcal{D}(k, \omega) = \begin{vmatrix} P_{11}(ik, -i\omega) & P_{12}(ik, -i\omega) & \dots & P_{1n}(ik, -i\omega) \\ P_{21}(ik, -i\omega) & P_{22}(ik, -i\omega) & \dots & P_{2n}(ik, -i\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1}(ik, -i\omega) & P_{n2}(ik, -i\omega) & \dots & P_{nm}(ik, -i\omega) \end{vmatrix}$$

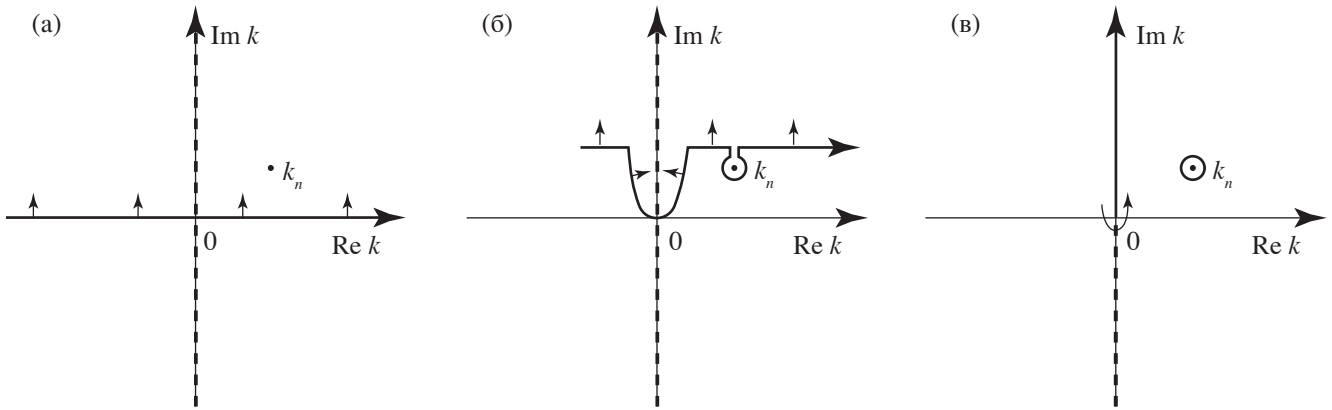
есть определитель системы уравнений, \mathcal{D}_j — определители матриц со столбцами, замененными на вектор правой части. Заметим, что уравнение $\mathcal{D}(k, \omega) = 0$ задает дисперсионное уравнение задачи, т.е. связывает волновое число и частоту в бегущих волнах $\sim e^{i(kx - \omega t)}$.

Получение исходных переменных по найденным изображениям осуществляется последовательно обратным преобразованием Фурье, и затем Лапласа:

$$u_i(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\Gamma} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} U_j(k, \omega) e^{ikx} dk \right) e^{-i\omega t} d\omega. \tag{3.3}$$

Контуры интегрирования показаны на фиг. 3, причем контур Γ лежит выше всех особенностей подынтегральных выражений в комплексной плоскости ω .

Сначала вычислим внутренний интеграл по k . Поскольку исходная система удовлетворяет принципу причинности, то ее бегущие волны не могут расти сколько угодно быстро, т.е. $M = \max_{k \in \mathbb{R}} \text{Im } \omega(k) < \infty$, где $\omega(k)$ — решения дисперсионного уравнения. Другими словами, существует максимум инкремента бегущих волн. Это означает, что при $\text{Im } \omega > M$ значения $k(\omega)$ не могут быть вещественными и разделяются на два подмножества: $\text{Im } k < 0$ и $\text{Im } k > 0$. Внутренний интеграл (3.3) содержит особенности двух типов. Первые — нули знаменателя (3.2), т.е. решения дисперсионного уравнения $k(\omega)$. Поскольку значение внутреннего интеграла вычисляется при $\text{Im } \omega > M$, то на вещественной оси такие решения отсутствуют в силу вышесказанного. Второй тип особенностей — возможные разрезы комплексной функции k , возникающие из-за неодномерности задачи или по



Фиг. 4. Деформирование пути интегрирования обратного преобразования Фурье при $x > 0$: исходный контур (а), деформирование при обходе разреза плоскости k и полюсов k_n (б), финальный контур, состоящий из интегрирования по берегам разреза и интегралов вокруг полюсов (в). Жирной сплошной линией показан контур интегрирования, штриховой линией — разрез, точкой — полюс.

другим причинам. С учетом этих замечаний при $x > 0$ контур интегрирования в плоскости k может быть продеформирован вверх как показано на фиг. 4, при этом вычлняются интегралы по берегам разреза и интегралы вокруг полюсов (3.2) — т.е. пространственные собственные моды, — которые вычисляются по теории вычетов. Остаток интеграла при деформировании вверх стремится к нулю, так как в случае $x > 0$ $e^{ikx} \rightarrow 0$ при $\text{Im } k \rightarrow +\infty$. В результате при $\text{Im } \omega > M$ внутренний интеграл (3.3) вычисляется в виде:

$$U_j(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_j(k, \omega) e^{ikx} dk = \sum_n a_j(\omega) e^{ik_n(\omega)x} + \int_0^{+\infty} b(k, \omega) e^{ikx} dk, \quad (3.4)$$

Первое слагаемое выражает вклад в решение от дискретного спектра — решений дисперсионного уравнения $k_n(\omega)$, лежащих при $\text{Im } \omega > M$ в верхней полуплоскости $\text{Im } k > 0$. Второе слагаемое выражает вклад в решение от непрерывного спектра, если он присутствует в задаче (т.е. если существует разрез плоскости k); здесь предполагается, что разрез плоскости k совпадает с мнимой осью; в противном случае вклад дают обходы всех разрезов; например, в задаче о возмущениях пограничного слоя таких разрезов два [7, § 7.1, § 7.3].

Решение при $x < 0$ дается аналогично, при этом деформировать контур интегрирования нужно вниз, а в решении будут присутствовать моды $k(\omega)$, лежащие при $\text{Im } \omega > M$ в нижней полуплоскости $\text{Im } k < 0$, и части непрерывного спектра, лежащие в нижней полуплоскости.

Далее, вычислим внешний интеграл (3.3). Будем деформировать контур интегрирования в плоскости ω вниз. При этом функции в (3.4) содержат единственную особенность — полюс в виде множителя $1/(\omega - \omega_0)$. Его обход показан на фиг. 5; дальнейшее деформирование интеграла вниз комплексной плоскости ω устремляет его значению к нулю, а оставшийся обход полюса вычисляется по теореме о вычетах.

В результате получаем решение задачи Коши при $t > 0$:

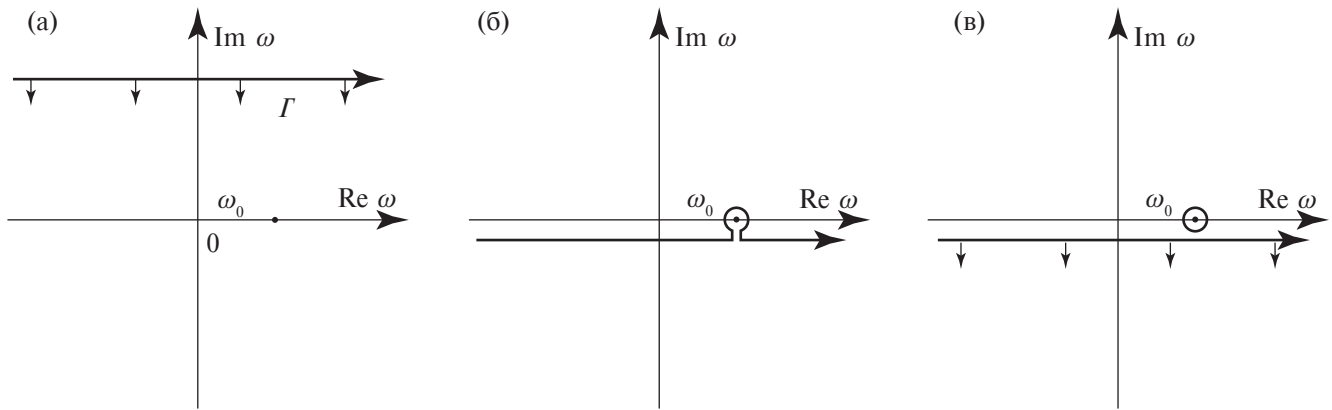
$$u_j(x, t) = \sum_n A_n(\omega_0) e^{i(k_n(\omega_0)x - \omega_0 t)} + \int_0^{+\infty} B(k, \omega_0) e^{i(kx - \omega_0 t)} dk, \quad (3.5)$$

где $A_n(\omega)$ и $B(\omega)$ — некоторые функции, точный вид которых не имеет значения для дальнейшего анализа.

Сделаем несколько замечаний к полученному решению. Во-первых, обратим внимание, что моды, входящие в сумму (3.5), при $x > 0$ соответствуют только тем значениям $k_n(\omega_0)$, которые при $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$ находятся в верхней полуплоскости k , а при $x < 0$ — в нижней полуплоскости k . Это и дает критерий того, какие волны движутся вправо, а какие влево, поскольку именно они дают вклад в точное решение задачи об источнике справа и слева от вносимого возмущения.

Во-вторых, в решение входит непрерывный спектр (если он присутствует в задаче, как обсуждалось выше), при этом при $x > 0$ в решение входит только та его часть, что лежит в верхней, а при $x < 0$ — в нижней полуплоскости плоскости k .

В третьих, в решении предполагалось, что число дискретных мод $k_n(\omega_0)$ не меняется в процессе деформирования контура Лапласа, а подынтегральное выражение в непрерывном спектре не содержит особенностей в процессе деформирования. Эти условия нарушаются, если одна из дискретных мод при деформировании кон-



Фиг. 5. Деформирование пути интегрирования обратного преобразования Лапласа: исходный контур (а), деформирование при обходе полюса (б), финальный контур, состоящий из интеграла вокруг полюса; интеграл по оставшемуся горизонтальному контуру равен нулю, так как уходит в бесконечность вниз (в). Жирной сплошной линией показан контур интегрирования, точкой — полюс.

тура Лапласа поглощается непрерывным спектром и исчезает, или, наоборот, появляется из него; этот случай будет отдельно рассмотрен ниже.

В-четвертых, деформирование контуров интегрирования, согласно теореме Коши, возможно лишь на конечных участках; возможность деформирования “хвостов” контуров интегрирования требует отдельного обоснования. Обычно такая возможность обеспечивается степенным убыванием подынтегральных выражений в “хвостах”, что вызвано преобладанием капиллярных и вязких эффектов в коротковолновых и высокочастотных процессах.

Наконец, саму постановку задачи можно модифицировать: рассмотреть не распространяющиеся от локализованного источника возмущения при $x > 0$ и $x < 0$, а исследовать полубесконечную задачу в области $x > 0$ или $x < 0$ с заданными граничными условиями при $x = 0$, порождающими возмущения. В этом случае применение одностороннего преобразования Фурье по x и преобразования Лапласа по t приводит к системе, по структуре аналогичной (3.1), где правая часть определяется граничными условиями. Дальнейшее деформирование контуров интегрирования и окончательное решение имеют такой же вид (3.5), как и в задаче об источнике.

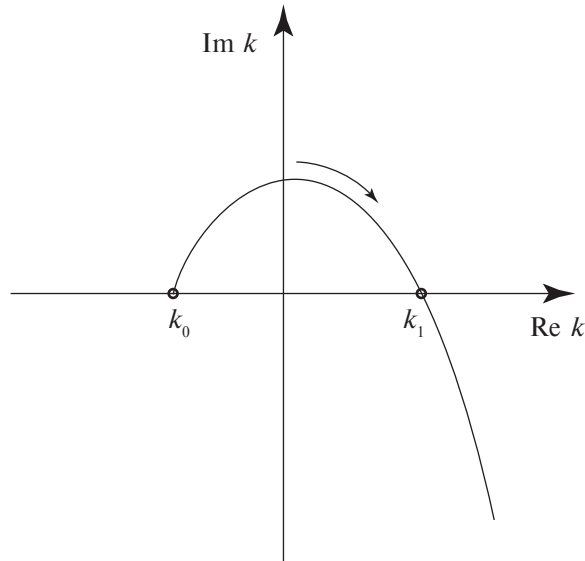
3.2. Физическая интерпретация

Из точного решения задачи Коши (3.5) мы получаем критерий Бриггса: вклад в решение справа и слева от источника дают только те моды, которые лежат в верхней и в нижней плоскости k , соответственно, при $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$. Однако при уменьшении $\text{Im } \omega$ расположение корней $k_n(\omega)$ может меняться, и они могут пересекать вещественную ось. В том числе, при вещественных значениях частоты расположение корней $k_n(\omega)$ может быть совершенно не таким, как при больших значениях $\text{Im } \omega$. Следовательно, для определения истинного направления движения волны необходимо увеличивать $\text{Im } \omega$ и следить, в какой полуплоскости остается каждый корень.

На данную картину можно посмотреть с другой точки зрения. При внесении возмущения с вещественной частотой ω_0 разбегающиеся в разные стороны волны могут усиливаться при удалении от источника за счет неустойчивости. Однако, добавление к источнику положительного инкремента $\text{Im } \omega$ эквивалентно экспоненциальному усилению во времени вносимых возмущений. Каким бы ни было пространственное усиление расходящихся волн, оно будет “перевешено” достаточно быстрым экспоненциальным временным усилением источника, так что при достаточно больших $\text{Im } \omega$, т.е. при очень быстром временном усилении возмущения в источнике, значения $\text{Im } k$ станут надежным индикатором: от источника при очень быстром усилении должны расходиться волны, экспоненциально затухающие в пространстве, т.е. с $\text{Im } k > 0$ при $x > 0$ и $\text{Im } k < 0$ при $x < 0$.

3.3. Усиление и непропускание

Как ранее было показано, при вещественных значениях частоты ни фазовая, ни групповая скорость не могут быть индикатором направления движения волны. Возможны ситуации, что $\text{Im } k < 0$, т.е. волна усиливается при удалении в положительном направлении оси x , но это усиление может быть следствием либо пространственного роста движущейся вправо волны (следствие неустойчивости), либо пространственного затухания движущейся влево волны. На “физическом” языке первая ситуация иногда называется усилением волны, вторая —



Фиг. 6. К доказательству корректности знака групповой скорости для идентификации направления движения наиболее быстро растущей волны: пример траектории движения корня $k(\omega)$ при увеличении $\text{Im } \omega$.

непропусканием, т.е. гашением волны при ее распространении влево (см. [18], [19, § 63]). Полученный выше критерий позволяет однозначно разделить эти два случая: если $\text{Im } k(\omega) > 0$ при $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$, то такая волна соответствует усилению, т.е. неустойчивости системы. В противном случае имеет место непропускание, т.е. волна движется в отрицательном направлении оси x и при этом экспоненциально затухает — система сопротивляется ее движению.

3.4. Связь с “наивными” индикаторами направления движения волны

При малых изменениях частоты или волнового числа их связь описывается т.н. преобразованием Гастера [7, § 7.1.3], [20], которое иногда используется при переходе от временной задачи устойчивости к пространственной и наоборот вблизи нейтральной кривой. А именно, пусть $k(\omega) = k_0$ при $\omega = \omega_0$. Добавляя малое изменение к частоте, $\omega = \omega_0 + i\delta$, $\delta > 0$, имеем разложение по формуле Тейлора:

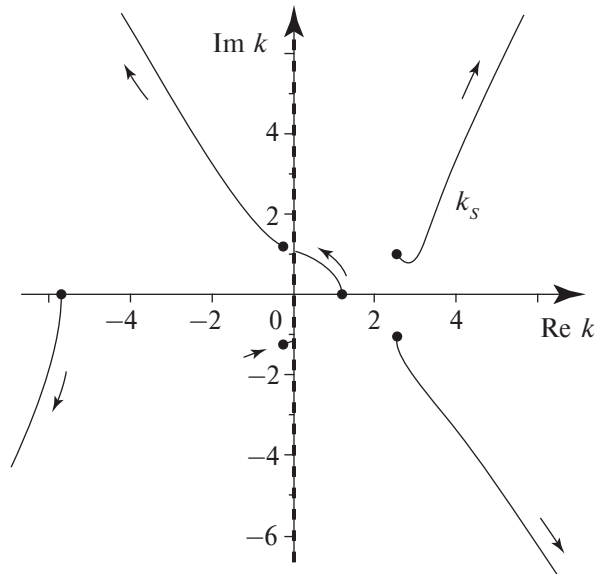
$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \dots = k_0 + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} i\delta + \dots = k_0 + \frac{i}{g(\omega_0)} \text{Im } \omega + \dots \quad (3.6)$$

Поскольку $\text{sign Re}(1/g(\omega_0)) = \text{sign Re } g(\omega_0)$, то направление вертикального смещения $k(\omega)$ при малом увеличении $\text{Im } \omega$ дается значением групповой скорости $\text{Re } d\omega/dk$. Таким образом, групповая скорость показывает направление “начального” изменения $\text{Im } k$ при малом увеличении $\text{Im } \omega$.

В общем случае корень $k(\omega)$, движущийся вверх или вниз при малом увеличении $\text{Im } \omega$, может развернуться и пойти в другую сторону (фиг. 6). Другими словами, знак групповой скорости позволяет понять поведение корней “в первом приближении”, но в общем случае несостоятелен.

Докажем, что тем не менее групповая скорость может быть корректно использована для идентификации направления движения волны с $k \in \mathbb{R}$, если эта волна — наиболее быстро растущая. Допустим, что это не так, т.е. существует вещественное k_0 , такое что $\text{Im } \omega(k_0)$ — наибольшее среди всех вещественных k . Малое увеличение $\text{Im } \omega$ приведет к “ложному” направлению движения $k(\omega)$, после чего рано или поздно произойдет разворот, и значение $k(\omega)$ перейдет в свою “правильную” полуплоскость. При этом неизбежно произойдет повторное пересечение вещественной оси k (фиг. 6). Т.е. найдется такое $k_1 \in \mathbb{R}$, при котором $\text{Im } \omega(k_1) > \text{Im } \omega(k_0)$, что опровергает изначальное предположение и доказывает утверждение.

Таким образом, доказана корректность использования знака групповой скорости $\text{sign Re } g$ как критерия определения направления движения волны для наиболее быстро растущего возмущения. Однако, в общем случае мод, не являющихся наиболее усиливающимися, это не так. В качестве примера такой ситуации на фиг. 7 показан расчет поведения решений $k(\omega)$ дисперсионного уравнения (2.1) при $\text{Re } \omega = 0.9$ и увеличении $\text{Im } \omega$. Обратим внимание на корень $k_s(\omega)$: при малом приращении $\text{Im } \omega$ он движется вниз, т.е. его групповая скорость отрицательна, и этот корень должен был бы быть отнесен к распространяющейся влево волне. Однако при дальнейшем увеличении $\text{Im } \omega$ он разворачивается и движется вверх, т.е. соответствует движущейся вправо волне.



Фиг. 7. Движение корней $k(\omega)$ уравнения (2.1) при $\text{Re } \omega = 0.9$ и $\text{Im } \omega$, увеличивающемся от 0 (точки) до 10. Направления движений корней показаны стрелками. Штриховой линией показан непрерывный спектр.

3.5. Непрерывный спектр и “исчезающие” дискретные моды

Пример, показанный на фиг. 7, представляет интерес и с другой точки зрения. А именно, при $\omega = 0.9$ имеется шесть корней дисперсионного уравнения (2.1) при параметрах (2.4):

$$k = 1.194, 2.528 + 1.036i, 2.528 - 1.036i, -0.257 + 1.220i, -5.736, -0.257 - 1.220i.$$

Как видно, существует 6 пространственных собственных мод, две из которых нейтральны. Их движение при увеличении $\text{Im } \omega$ показано на фиг. 7. Можно видеть, что нейтральная мода с $k = 1.194$ подходит к непрерывному спектру, сливается с ним и исчезает. То же происходит с модой, соответствующей $k = -0.257 - 1.220i$. При больших значениях $\text{Im } \omega$ существуют лишь 4 собственные моды $k(\omega)$.

Исчезновение дискретной моды формально не позволяет применить к ней критерий Бриггса, так как ее положение на плоскости k при больших значениях $\text{Im } \omega$ отсутствует: этой моды при таких ω не существует. Для разрешения этого вопроса вернемся к получению точного решения задачи Коши (3.5). При движении контура Лапласа вниз появление новой дискретной моды из непрерывного спектра сопровождается сингулярностью интеграла по берегам разреза плоскости k , поскольку в этот момент интеграл во втором слагаемом (3.5) проходит через полюс. Для устранения сингулярности можно продеформировать контур интегрирования в плоскости k как показано на фиг. 8. При этом из непрерывного спектра вычлняется новая дискретная мода.

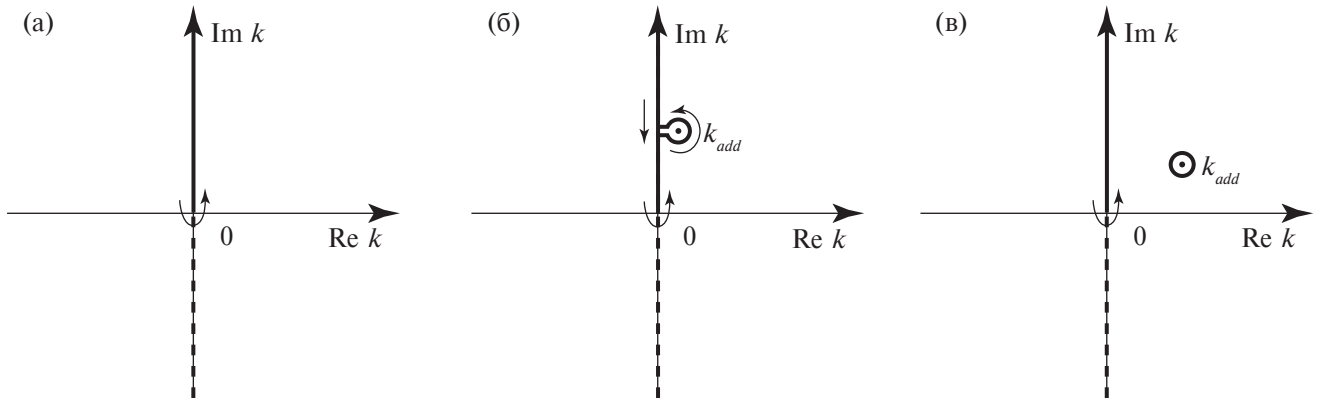
Проворачивая эту картину в обратном направлении, т.е. при увеличении $\text{Im } \omega$, мы получаем обобщение критерия Бриггса направления движения волны на случай исчезающих при $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$ мод: такие моды движутся вправо, если исчезают в части непрерывного спектра, лежащей в верхней полуплоскости k , и влево, если исчезают в нижней полуплоскости.

3.6. “Исчезающие” моды при отсутствии непрерывного спектра

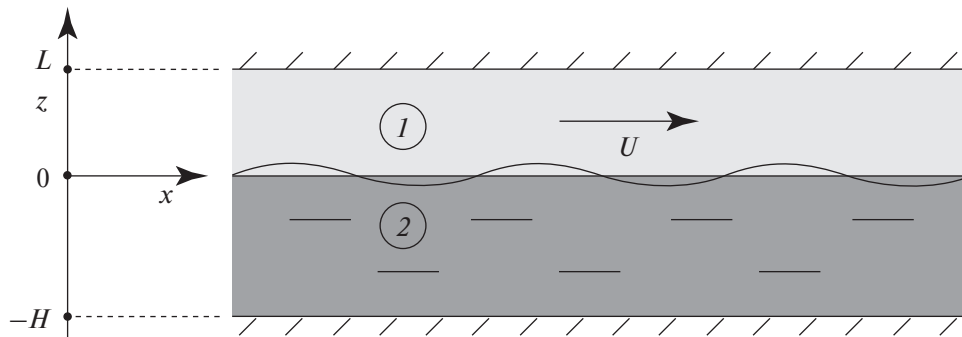
Рассмотрим это вопрос с другой точки зрения. Поскольку в рассмотренном выше примере (2.1) непрерывный спектр являлся следствием неограниченной по z области, рассмотрим аналог этой задачи для нижнего и верхнего слоев жидкостей конечных размеров (фиг. 9). Дисперсионное уравнение в таком случае имеет вид (см. [13, гл. 8, § 12, § 13])

$$(\omega - Uk)^2 \text{cth}(kL) + \varkappa \omega^2 \text{cth}(kH) = (\varkappa - 1)k + k^3. \quad (3.7)$$

Очевидно, что при $L, H \rightarrow \infty$ уравнение (3.7) сводится к (2.1), однако при сколь угодно больших, но конечных L, H оно не имеет разрезов плоскости k . Докажем, что вместо этого, оно имеет дополнительный дискретный спектр, лежащий при $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$ вблизи мнимой оси k . Другими словами, непрерывный спектр “распадается” на дополнительное счетное множество дискретного спектра, как это имеет место в других задачах гидродинамической устойчивости [7].



Фиг. 8. Вычленение новой дискретной моды, появляющейся из непрерывного спектра при понижении контура Лапласа: исходный интеграл по разрезу (а), появление полюса из разреза и его обход (б), вычленение обхода полюса в отдельный контур (в). Жирной сплошной линией показан контур интегрирования, штриховой линией — разрез, точкой — полюс.



Фиг. 9. Волны на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины, над которой движется слой более легкой жидкости.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим корни $k(\omega)$ уравнения (3.7) при больших значениях $\text{Im } \omega$. Обозначим $\omega = \omega_r + i\omega_i$ и рассмотрим предел $\omega_i \rightarrow +\infty$. Анализ порядков величин, входящих в дисперсионное уравнение, показывает, что предельные значения корней распадаются на два типа. Первые не лежат вблизи мнимой оси и стремятся к бесконечности; для таких корней, лежащих в правой полуплоскости, имеем

$$(\omega - Uk)^2 + \varkappa\omega^2 \sim k^3.$$

Отсюда $k \sim \omega^{2/3}$, и дальнейшее упрощение дает

$$(1 + \varkappa)\omega^2 \sim k^3 \Rightarrow k \sim -(1 + \varkappa)\omega_i^2)^{1/3},$$

причем берутся два значения кубического корня, лежащие в области $\text{Re } k > 0$. Аналогично получаются еще два корня, лежащие в области $\text{Re } k < 0$.

Помимо этих четырех корней $k(\omega)$ (они же присутствуют и при $L = H = \infty$) имеется второе семейство корней, лежащих вблизи мнимой оси. Обозначим $k = k_r + ik_i$ и, предполагая, что $|k_r| \ll |k_i|$, получим

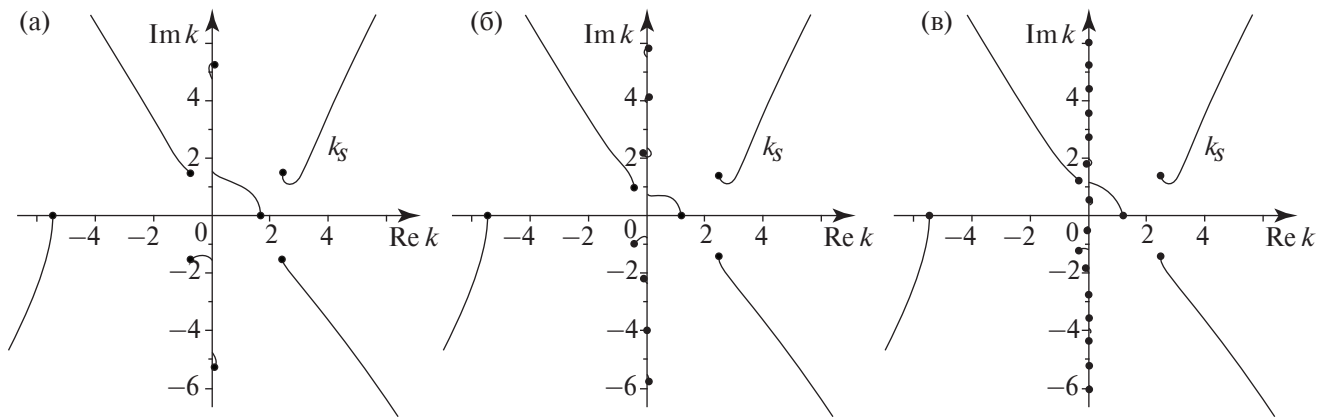
$$(\omega_i - Uk_i)^2 \text{ctg}(k_iL) + \varkappa\omega_i^2 \text{ctg}(k_iH) = (\varkappa - 1)k_i - k_i^3.$$

Сокращая на ω_i^2 , получаем для k_i , удовлетворяющих условию $|k_i| \lesssim \omega_i^{2/3}$, уравнение

$$\text{ctg}(k_iL) + \varkappa \text{ctg}(k_iH) = 0.$$

Оно имеет счетное число решений; таким образом, при $\omega_i \rightarrow +\infty$ второе семейство корней состоит из счетного набора, лежащего вблизи мнимой оси.

Расчитанное расположение точек спектра при $L = H = 1$ и $\omega = 0.9$, а также траектории движения корней $k(\omega)$ при увеличении $\text{Im } \omega$ показаны на фиг. 10а. Как видно, “исчезающие” моды сохраняются, но при



Фиг. 10. Движение корней $k(\omega)$ уравнения (2.1) при $\text{Re } \omega = 0.9$ и $\text{Im } \omega$, увеличивающемся от 0 (точки) до 10 при $L = H = 1$ (а), 2 (б), 4 (в).

$\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$ стремятся к постоянным значениям, располагающимся на мнимой оси — т.е. там, где при $L, H = \infty$ находится непрерывный спектр. Увеличение L и H , фиг. 10б, в сохраняет это поведение, при этом происходит насыщение мнимой оси k модами дискретного спектра, которые при $L, H \rightarrow \infty$ заполняют ее полностью, превращаясь в непрерывный спектр.

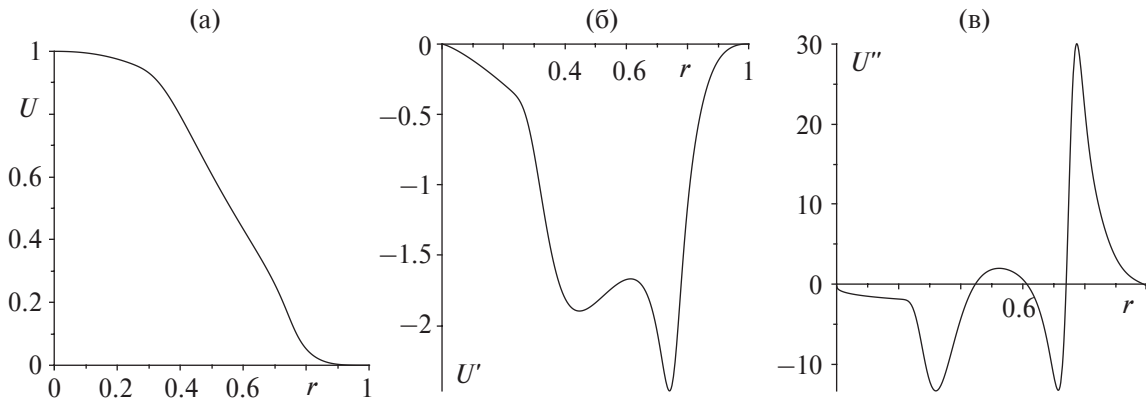
Заметим, что в отличие от уравнения (3.7), где дискретные моды стремятся к константам, лежащим на мнимой оси при $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$, исчезающие моды уравнения (2.1) действительно исчезают — они переходят на другой, нефизичный, лист римановой поверхности функции $|k|$, перестают удовлетворять условию затухания при $|z| \rightarrow \infty$, и ни в каком смысле не остаются вблизи мнимой оси. Таким образом, поведение корней (3.7) и (2.1) вблизи мнимой оси принципиально различно, несмотря на то, что (2.1) получается из (3.7) предельным переходом. Вместе с тем решение задачи Коши о распространении возмущений от источника в неограниченном случае получается предельным переходом ограниченной задачи из-за присутствия в неограниченной задаче непрерывного спектра. Данный кажущийся парадокс объясняется тем, что моды непрерывного спектра в неограниченной задаче не являются в истинном смысле модами — они по отдельности не удовлетворяют условию затухания на бесконечности, это условие удовлетворяется только их суперпозицией, т.е. при интегрировании. При этом в ограниченной задаче моды дискретизированного непрерывного спектра являются “настоящими” модами, поскольку от них не требуется затухание при удалении от границы раздела среда, а лишь равенству нулю на далеко расположенной стенке.

4. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Итак, выше на модели ветра над слоем жидкости было показано, что во-первых, фазовая и групповая скорости могут ошибочно предсказывать направление движения волны. Во-вторых, применение физически обоснованного критерия Бриггса, заключающегося в вычислении $\lim_{\text{Im } \omega \rightarrow +\infty} \text{sign } \text{Im } k(\omega)$, может быть невозможно из-за поглощения рассматриваемой дискретной моды непрерывным спектром при больших значениях $\text{Im } \omega$ и, следовательно, несуществования предела. Вместе с тем, в рассмотренной достаточно простой модели, допускающей аналитическое исследование функции $k(\omega)$, данные вопросы могут быть разрешены на основе физических соображений. Настоящий раздел посвящен более сложному случаю задачи гидродинамической устойчивости затопленной струи жидкости, где наблюдаются такие же эффекты, но аналитическое исследование или простые физические соображения уже невозможны.

4.1. Постановка задачи о затопленной струе и метод численного решения

Рассмотрим круглую затопленную струю с профилем скорости, показанным в безразмерном виде на фиг. 11 (в качестве масштабов безразмеривания приняты максимальная скорость и радиус струи). Этот профиль соответствует полученному в экспериментальной установке [21, 22] при удалении от выходного сечения сопла $z/D = 0.5$, где D — диаметр струи. Число Рейнольдса, соответствующее данному профилю, построенное по радиусу и максимальной скорости, равно $\text{Re} = 6122$. Экспериментально измеренное распределение скорости было приближено гладкой функцией, которая используется в последующих вычислениях. Данный профиль скорости имеет три точки перегиба (фиг. 11) и три обобщенные точки перегиба (отвечают за неустойчивость в



Фиг. 11. Профиль скорости струи и его производные $U(r)$ (а), $U'(r)$ (б), $U''(r)$ (в).

осесимметричных течениях [23]), которые порождают две моды неустойчивости. Неустойчивость имеет конвективный характер [24].

Для расчета пространственного спектра в плоскопараллельном приближении рассматривается система уравнений Навье–Стокса, линеаризованная вокруг стационарного течения с профилем скорости $\mathbf{U} = (0, 0, U(r))$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}',$$

$$\nabla \mathbf{u}' = 0,$$

где \mathbf{u}' , p' — возмущения вектора скорости и давления, и ее осесимметричные решения, имеющие в цилиндрической системе координат вид

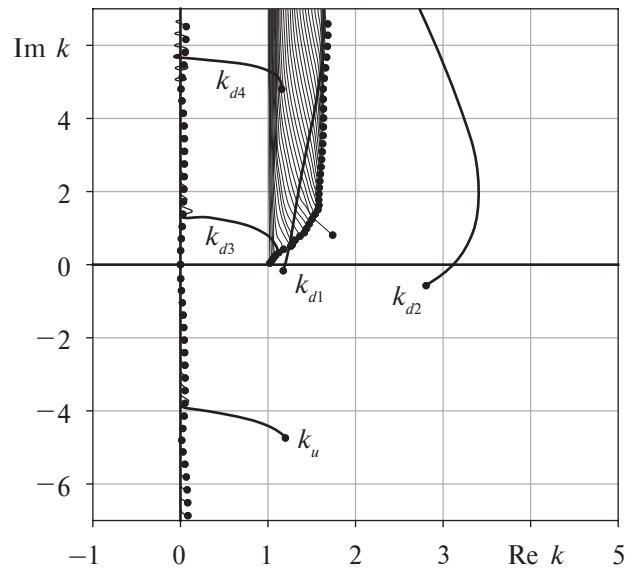
$$\begin{pmatrix} u'(r, \theta, z) \\ v'(r, \theta, z) \\ w'(r, \theta, z) \\ p'(r, \theta, z) \end{pmatrix} = e^{i(kz - \omega t)} \begin{pmatrix} \tilde{u}(r) \\ \tilde{v}(r) \\ \tilde{w}(r) \\ \tilde{p}(r) \end{pmatrix}.$$

Собственные моды должны удовлетворять нулевым граничным условиям для компонент возмущения скорости при $r \rightarrow +\infty$ и кинематическим условиям [23] при $r = 0$. При численном решении внешнее нулевое граничное условие ставится при достаточно большом значении $r = R_{\text{out}}$, которое выбирается на основе анализа сходимости решения при увеличении R_{out} . Расчеты ниже приведены при $R_{\text{out}} = 10$, этого значения достаточно для сходимости рассматриваемой части дискретного спектра. Пространственная задача на собственные значения решалась спектральным методом, детально описанным в [4, 6].

4.2. Поведение спектра при увеличении $\text{Im } \omega$

На фиг. 12 точками показан рассчитанный пространственный спектр при $\omega = 1$, линиями показано движение мод при $\omega = 1 + i\omega_i$, $0 \leq \omega_i \leq 100$. В спектре можно выделить несколько семейств мод. Во-первых, моды, лежащие вблизи мнимой оси k , соответствуют дискретизированному из-за конечного R_{out} непрерывному спектру. При увеличении R_{out} они наполняют мнимую ось и в пределе заполняют ее полностью. Второе семейство — близко расположенные моды дискретного спектра в первой четверти комплексной плоскости k — соответствуют коротковолновым ВКБ-колебаниям амплитуды возмущения, локализованным между центром и краем струи. Эти моды аналогичны S-модам в пристенных течениях. Третье семейство — “обычные” моды дискретного спектра, из которых на показанном участке плоскости k присутствуют пять. Четыре из них k_{d1} , k_{d2} , k_{d3} , k_{d4} , соответствуют волнам, движущимся вниз по потоку — при $\omega \in \mathbb{R}$ две растущих (k_{d1} , k_{d2}) — моды неустойчивости, — и две затухающих (k_{d3} , k_{d4}). Пятая мода k_u соответствует затухающей волне, движущейся вверх по потоку.

Обратим внимание, что дискретная мода k_u , движущаяся вверх по потоку, неверно распознается как движущаяся вниз по потоку по знаку как групповой, так и фазовой скорости. А именно, $\text{Im } k$ увеличивается при увеличении $\text{Im } \omega$, поэтому в силу разложения (3.6) $\text{Re } g(k) > 0$. Также, поскольку эта мода при $\omega \in \mathbb{R}$ лежит в четвертой четверти плоскости k , ее фазовая скорость $\text{Re } c(k) > 0$. Следовательно, оба “наивных” индикатора дают



Фиг. 12. Пространственный спектр $k(\omega)$ затопленной струи при $\omega = 1 + i\omega_i$. Точками показан спектр при $\omega_i = 0$, линиями — его движение при увеличении ω_i . Тонкими линиями показано движение дискретных ВКБ-мод, жирными линиями — “обычных” дискретных мод, обычными линиями показано движение дискретной репрезентации непрерывного спектра вблизи мнимой оси.

направление движения в положительном направлении оси x , в то время как обобщенный критерий Бриггса дает противоположное направление.

Кроме того, эта мода, как и две движущиеся вниз по потоку моды k_{d3} , k_{d4} , поглощается непрерывным спектром и “исчезает” при увеличении $\text{Im } \omega$. Таким образом, определить направление движения этих волн без полученного в настоящей работе обобщения критерия Бриггса было бы невозможно.

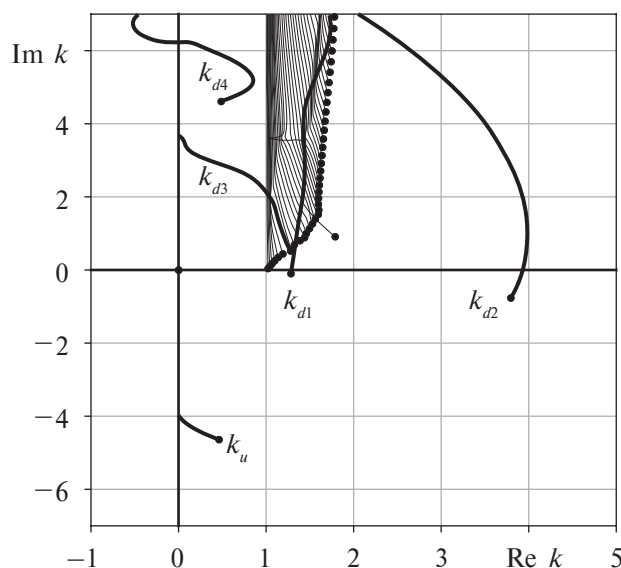
Отметим, что аналоги моды k_u , как и других движущиеся вверх по потоку мод, при анализе пристенных течений в работах [10, 11] правильно отсеивались как “нефизичные”. Однако никаких формальных причин отделить ее от мод неустойчивости k_{d1} , k_{d2} нет: эти три моды имеют одинаковую по знаку фазовую и групповую скорости, располагаются в одинаковой четверти плоскости k . Более того, аналоги моды k_u в действительности физичны, но распространяются вверх по потоку и должны были бы учитываться, если бы задача о развитии возмущений исследовалась бы в противоположном направлении — вверх по потоку. Как видно из полученных результатов, “простого” способа обоснованно идентифицировать направление движения моды k_u и не включить ее в множество движущихся вниз по потоку мод, кроме как обобщения критерия Бриггса, не существует.

4.3. Случай отсутствия непрерывного спектра: течение в трубе

Рассмотрим, аналогично п. 3.6, ситуацию, когда граничное условие прилипания ставится при $r = 1$, что эквивалентно значению $R_{\text{out}} = 1$. Это можно физически интерпретировать как втекание струи в трубу и дальнейшее ее движение в ней, с длительным сохранением профиля скорости — что можно считать обоснованным в силу достаточно большого числа Рейнольдса.

Результат расчета спектра в этом случае показан на фиг. 13. Качественно он соответствует структуре спектра неограниченной струи (фиг. 12), за исключением того, что отсутствует непрерывный спектр. Моды, в трубе поглощающиеся непрерывным спектром, в случае трубы подходят к мнимой оси, и в пределе $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$ стремятся к фиксированным точкам на мнимой оси, оставаясь при этом дискретными модами. Таким образом, поведение мод при переходе от неограниченной к ограниченной задаче качественно аналогично рассмотренному в п. 3.6 случаю.

Так же, как в струе, направление движения моды k_u неправильно идентифицируется как фазовой, так и групповой скоростью. Критерий Бриггса, очевидно, дает правильный результат, так как мода в пределе $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$ остается в области $\text{Im } k < 0$.



Фиг. 13. Пространственный спектр $k(\omega)$ затопленной струи, заключенной в трубу при $\omega = 1 + i\omega_i$. Точками показан спектр при $\omega_i = 0$, линиями — его движение при увеличении ω_i . Тонкими линиями показано движение дискретных ВКБ-мод, жирными линиями — “обычных” дискретных мод.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен вопрос о направлении пространственного распространения волны, описываемой комплекснозначной функцией $k(\omega)$, где ω — частота, k — волновое число. Продемонстрировано, что фазовая скорость не может служить индикатором направления движения волны. Доказано, что групповая скорость, используемая во многих работах как такой индикатор, также несостоятельна, за исключением наиболее быстро растущей волны.

Для корректной идентификации направления движения волны необходимо использовать физически обоснованный критерий Бриггса, вытекающий из принципа причинности — а именно, $\text{sign Im } k(\omega)$ при $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$. Однако при этом возможны ситуации “исчезающих” при больших значениях $\text{Im } \omega$ дискретных мод из-за их поглощения непрерывным спектром; приведен пример задачи о волнах на поверхности жидкости, в котором такая ситуация анализируется аналитически. В настоящей работе критерий Бриггса распространен на такой случай в общем виде: “исчезающая” волна движется вправо, если поглощается непрерывным спектром, лежащим в области $\text{Im } k > 0$, и влево в противном случае.

Продемонстрирован пример задачи об устойчивости затопленной струи, где возникает “исчезающая” мода, сопровождающиеся одновременно ложной идентификацией своего направления распространения и по фазовой, и по групповой скорости. Истинное направление движения такой волны определяется полученным в настоящей работе обобщением критерия Бриггса.

Автор благодарит Д.А. Ашурова за проведение расчетов спектра затопленной струи и Н.В. Никитина за полезные комментарии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hersh R.* Boundary conditions for equations of evolution // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1964. Vol. 16(4). P. 243–264.
2. *Andersson P., Berggren M., Henningson D.S.* Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // *Phys. Fluids.* 1999. Vol. 11. P. 134–150.
3. *Reshotko E., Tumin A.* Spatial theory of optimal disturbances in a circular pipe flow // *Phys. Fluids.* 2001. Vol. 13. P. 991–996.
4. *Ivanov O.O., Ashurov D.A., Gareev L.R., Vedeneev V.V.* Optimal disturbances in round submerged jets // *J. Fluid Mech.* 2023. Vol. 963. Paper A8.

5. *Ashurov D.A., Nikitin H.V.* Развитие стационарных возмущений в пространственно развивающейся струе // Изв. РАН. МЖГ. 2024. № 4. С. 94–102.
6. *Ashurov D.A.* Optimal disturbances in round submerged jets // *Phys. Fluids*. 2024. Vol. 36. Paper 104118.
7. *Schmid P.J., Henningson D. S.* Stability and transition in shear flows. Springer, 2001. 558 p.
8. *Towne A., Colonius T.* One-way spatial integration of hyperbolic equations // *J. Comp. Phys.* 2015. Vol. 300. P. 844–861.
9. *Towne A., Rigas G., Kamal O., Pickering E., Colonius T.* Efficient global resolvent analysis via the one-way Navier–Stokes equations // *J. Fluid Mech.* 2022. Vol. 948. Paper A9.
10. *Zasko G.V., Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Y.M.* Simulating the propagation of boundary-layer disturbances by solving boundary-value and initial-value problems // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2024. Vol. 39(1). P. 47–59.
11. *Бойко А.В., Демьянко К.В., Засько Г.В., Нечепуренко Ю.М.* О параболизации уравнений распространения малых возмущений в двумерных пограничных слоях // *Теплофизика и аэромеханика*. 2024. № 3. С. 423–440.
12. *Веденеев В.В.* Математическая теория устойчивости плоскопараллельных течений и развитие турбулентности. Долгопрудный: Издательский Дом “Интеллект”, 2016. 152 с.
13. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
15. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // *Бюлл. Моск. Ун. Секция А. Математика и механика*. 1938. Т. 1. Вып. 7. С. 16.
16. *Briggs R. J.* Electron-Stream Interaction with Plasmas. MIT Press, 1964. 187 p.
17. *Ashpis D. E., Reshotko E.* The vibrating ribbon problem revisited // *J. Fluid Mech.* 1990. Vol. 213. P. 531–547.
18. *Ахиезер А. И., Половин Р. В.* Критерии нарастания волн // *УФН*. 1971. Т. 104. № 2. С. 185–200.
19. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Теоретическая физика. Том 11. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
20. *Gaster M.* A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability // *J. Fluid Mech.* 1962. Vol. 14(2). P. 222–224.
21. *Zayko J., Teplovodskii S., Chicherina A., Vedeneev V., Reshmin A.* Formation of free round jets with long laminar regions at large Reynolds numbers // *Phys. Fluids*. 2018. Vol. 30. Paper 043603.
22. *Gareev L.R., Zayko J.S., Chicherina A.D., Trifonov V.V., Reshmin A.I., Vedeneev V.V.* Experimental validation of inviscid linear stability theory applied to an axisymmetric jet // *J. Fluid Mech.* 2022. Vol. 934. Paper A3.
23. *Batchelor G.K., Gill A.E.* Analysis of the stability of axisymmetric jets // *J. Fluid Mech.* 1962. Vol. 14 (4). P. 529–551.
24. *Vedeneev V., Zayko J.* On absolute instability of free jets // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2018. Vol. 1129. Paper 012037.

ABOUT THE DIRECTION OF TRAVEL OF TRAVELING WAVES

V. V. Vedenev^{a,*}^a8, Gubkina St., Moscow 119333, V.A. Steklov Russian Academy of Sciences, Russia

*e-mail: vasily@vedeneev.ru

Received: 27.10.2024

Revised: 01.11.2024

Accepted: 25.02.2025

Abstract. In a number of problems involving spatial wave propagation, it is necessary to distinguish between waves traveling in one direction and in the other. Examples of such problems are the propagation of waves from a point the problem of pulsating source; the problem of spatial optimal perturbations; the problem of determining the absolute or convective character of instability, etc. In addition, when calculating the wave motion in the inhomogeneous medium by marching methods for numerical stabilization, the projection of the solution onto the space of waves propagating in the same direction is used, which also requires their correct screening. Commonly accepted in the literature indicators of the direction of wave motion are the Briggs criterion derived from the causality principle and, in some papers, the sign of the group velocity. This paper discusses their interpretations and the relationship between them. Examples are given where the identification of the wave direction by the sign of the group velocity is erroneous and leads to qualitatively incorrect results. The case when direct application of the Briggs criterion is impossible due to absorption of the discrete mode describing the wave by a continuous spectrum is considered for the first time. A generalization of the Briggs criterion to this case is given and examples of its application are given.

Keywords: traveling wave, phase velocity, group velocity, Briggs criterion, continuous spectrum.