

0.1 Устойчивость течений с кусочно-линейными профилями скорости

Как известно, любой гладкий профиль скорости можно поточечно приблизить кусочно-линейным профилем с любой степенью точности (рис. 1, а). Поскольку возмущения течений с кусочно-линейными профилями, как будет видно ниже, находятся аналитически, такое приближение часто использовалось до появления быстродействующих компьютеров, позволяющих рассчитать спектр задачи на собственные значения численно для любого профиля скорости. В то же время, приближение гладких профилей кусочно-линейными не позволяет использовать общие теоремы об устойчивости, поскольку $u_0'' = 0$ на всех интервалах линейности, а в точках излома теряется гладкость решения.

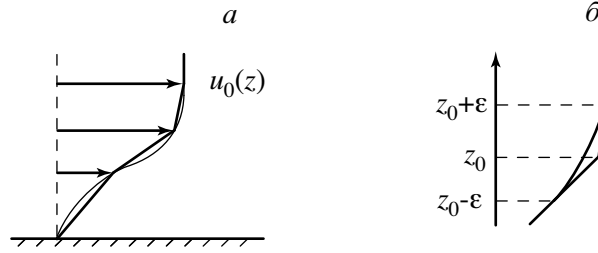


Рис. 1: Приближение гладкого профиля кусочно-линейным (а), сглаживание разрыва (б).

Исследуем возмущения кусочно-линейных профилей. На участках, где профиль скорости линеен, $u_0''(z) = 0$, уравнение Рэлея превращается в уравнение с постоянными коэффициентами

$$(u_0 - c) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \alpha^2 w \right) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$w(z) = C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z}. \quad (1)$$

В точках разрыва u_0 или u_0' нужно получить условия на разрывах, которыми нужно «сшивать» решения с соседних интервалов. Для получения этих условий рассмотрим точку разрыва z_0 и сгладим профиль скорости в окрестности $[z_0 - \varepsilon; z_0 + \varepsilon]$ (рис. 1, б). Проинтегрируем уравнение Рэлея

$$\frac{d}{dz} \left((u_0 - c) \frac{dw}{dz} - w \frac{du_0}{dz} \right) - \alpha^2 (u_0 - c) w = 0$$

от $z_0 - \varepsilon$ до $z_0 + \varepsilon$:

$$\Delta \left((u_0 - c) \frac{dw}{dz} - w \frac{du_0}{dz} \right) - \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \alpha^2 (u_0 - c) w dz = 0,$$

где Δ — разность значений функции в точках $z_0 + \varepsilon$ и $z_0 - \varepsilon$, и устремим ε к нулю. Тогда получим:

$$\Delta \left((u_0 - c) \frac{dw}{dz} - w \frac{du_0}{dz} \right) = 0 \quad (2)$$

Это — первое условие на разрыве.

Для получения второго условия вспомним из вывода уравнения Рэлея, что выражение, стоящее под знаком производной в уравнении Рэлея — это возмущение давления, с точностью до множителя:

$$(u_0 - c) \frac{dw}{dz} - w \frac{du_0}{dz} = i\alpha \hat{p}$$

Считая, что $c \neq u_0(z_0)$, разделим в этом равенстве обе части на $(u_0 - c)^2$. Получим:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{w}{u_0 - c} \right) = i\alpha \frac{\hat{p}}{(u_0 - c)^2}$$

Как и при выводе первого условия, проинтегрируем это равенство от $z_0 - \varepsilon$ до $z_0 + \varepsilon$ и устремим $\varepsilon \rightarrow 0$. Получим второе условие на разрыве:

$$\Delta \left(\frac{w}{u_0 - c} \right) = 0. \quad (3)$$

Заметим, что эти условия можно бы получить и по-другому, не сглаживая профиль скорости и стягивая область сглаживания к точке разрыва, а рассматривая разрыв скорости как поверхность тангенциального разрыва. Тогда при наложении возмущения на течение, необходимо записать условия на возмущенной поверхности тангенциального разрыва. Кинематическое условие — непересечение частицами поверхности — приводит к (3), динамическое условие — равенство возмущений давления по разные стороны от разрыва — приводит к (2).

Подстановка решений (1) в граничные условия и условия на разрывах (2), (3) приводит к однородной линейной системе алгебраических уравнений на коэффициенты (1). Условие существования ненулевого решения — равенство её определителя нулю, что даёт уравнение

$$D(\alpha, c) = 0,$$

называемое дисперсионным уравнением. Если найдётся вещественное α , такое что решение дисперсионного уравнения $\text{Im } c(\alpha) > 0$, то течение неустойчиво. Рассмотрим теперь три конкретных профиля.

Плоское течение Куэтта. В этом течении $u_0(z) = z$ (рис. 2, а). Подставляя (1) в граничные условия $w(z_1) = w(z_2) = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} C_1 e^{\alpha z_1} + C_2 e^{-\alpha z_1} &= 0, \\ C_1 e^{\alpha z_2} + C_2 e^{-\alpha z_2} &= 0. \end{aligned}$$

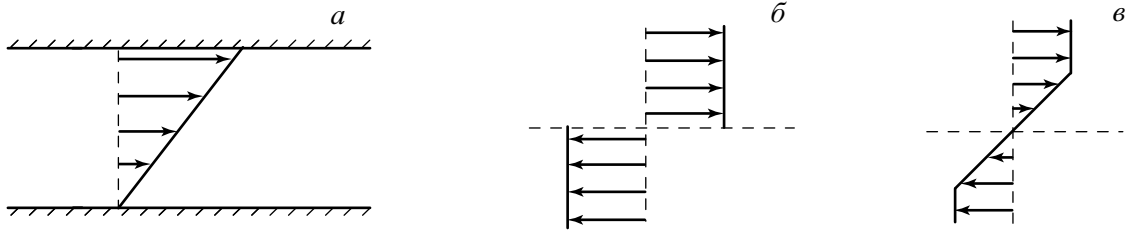


Рис. 2: Плоское течение Куэтта (а), тангенциальный разрыв (б), слой смешения (в).

Эта система не имеет ненулевых решений, следовательно, течение Куэтта не имеет собственных мод. Это ещё не позволяет судить об устойчивости произвольных возмущений, но в следующем разделе будет показано, что все они затухают, и течение Куэтта в невязком приближении устойчиво.

Тангенциальный разрыв. Течению описывается профилем, показанным на рис. 2, б:

$$u_0(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ -1, & z < 0 \end{cases}$$

Поскольку течение неограничено, то граничные условия ставятся в бесконечности, что в каждой области выделяет одну из экспонент (1): $w = C_1 e^{-\alpha z}$ при $z > 0$, $w = C_2 e^{\alpha z}$ при $z < 0$ (без ограничения общности считаем $\alpha > 0$). Условия на разрыве $z = 0$ дают два уравнения

$$\begin{aligned} C_2(1 - c) + C_1(1 + c) &= 0, \\ C_2(-1 - c) + C_1(1 - c) &= 0. \end{aligned}$$

Приравнивая определитель к нулю получаем: $c = \pm i$. Таким образом, всегда найдётся растущая мода ($c = i$), и тангенциальный разрыв в несжимаемой жидкости всегда неустойчив, причём, так как c не зависит от α , то растущими являются моды со всеми возможными длинами волн. Неустойчивость тангенциального разрыва также часто называется неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца.

Тангенциальные разрывы встречаются в самых разных областях аэродинамики: при движении самолётов в воздухе, течениях в авиационных двигателях, в атмосферных явлениях, в космической газовой динамике и других областях, и их неустойчивость, а также развитие этой неустойчивости влияет на все эти течения. Один из примеров показан на рис. 3 — вихревая перелена (вид тангенциального разрыва), сходящая с задней кромки крыла самолёта [1, §72]. Из-за неустойчивости перелена сворачивается в т.н. «вихревые жгуты», втягивающие в движение воздух за самолётом. При наличии облачности вихревые жгуты видны невооружённым глазом. Другой пример показан на рис. 4: развитие неустойчивости тангенциального разрыва, образовавшегося между двумя слоями воздуха, движущегося с разной скоростью.

Слой смешения. Это течение представляет собой сглаженный тангенциальный разрыв (считается, что сглаживание происходит благодаря действию сил вязкости),

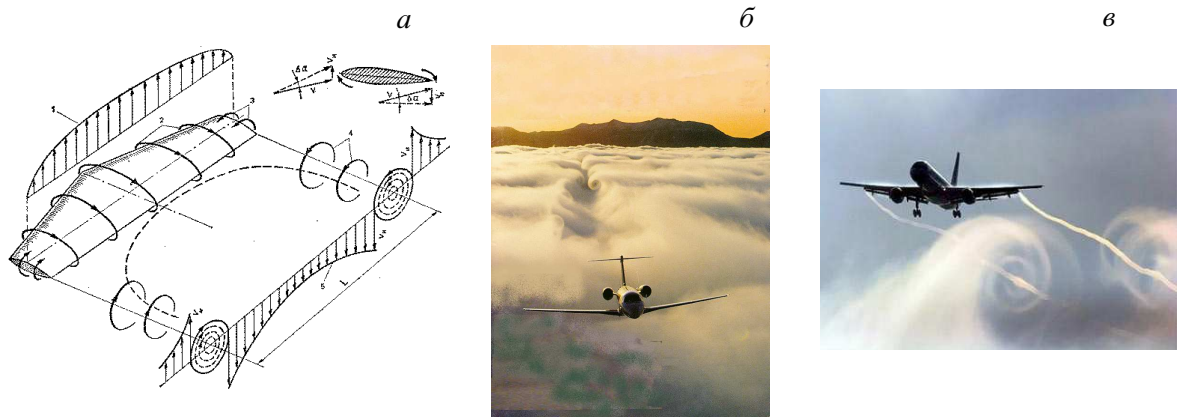


Рис. 3: Схема обтекания крыла конечного размаха и схода вихревой перелены (а), развитие неустойчивости вихревой пелены (б, в).

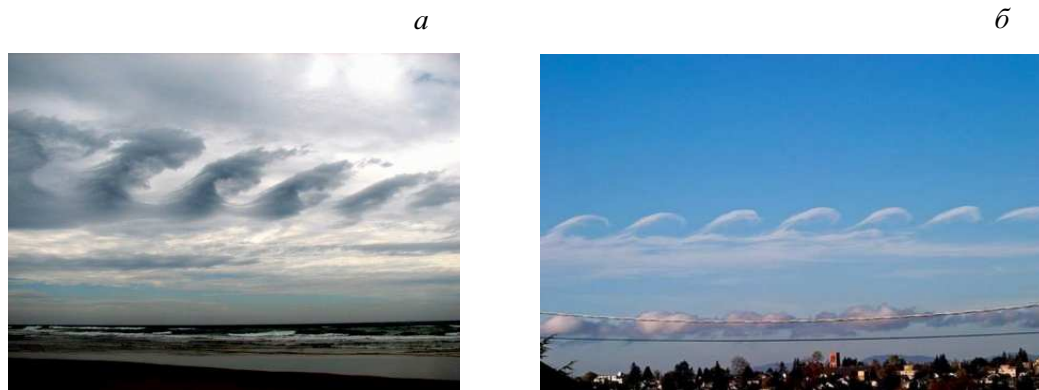


Рис. 4: Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в атмосфере.

рис. 2, в. Профиль скорости имеет вид

$$u_0(z) = \begin{cases} 1, & z > 1 \\ z, & -1 < z < 1 \\ -1, & z < -1 \end{cases}$$

Удовлетворение граничным условиям на бесконечности, как и в тангенциальном разрыве, выделяет по одной экспоненте в областях $z > 1$ и $z < -1$. Таким образом,

$$\begin{cases} w = C_1 e^{-\alpha z}, & z > 1, \\ w = C_2 e^{-\alpha z} + C_3 e^{\alpha z}, & -1 < z < 1, \\ w = C_4 e^{\alpha z}, & z < -1 \end{cases}$$

Условия на разрыве $z = 1$ дают:

$$\begin{aligned} C_1 e^{-\alpha} - C_2 e^{-\alpha} - C_3 e^{\alpha} &= 0, \\ C_1 \alpha e^{-\alpha} - C_2 \left(\alpha e^{-\alpha} + \frac{e^{-\alpha}}{1-c} \right) + C_3 \left(\alpha e^{\alpha} - \frac{e^{\alpha}}{1-c} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично, на разрыве $z = -1$

$$\begin{aligned} C_2 e^{\alpha} + C_3 e^{-\alpha} - C_4 e^{-\alpha} &= 0, \\ C_2 \left(-\alpha e^{\alpha} + \frac{e^{\alpha}}{1+c} \right) + C_3 \left(\alpha e^{-\alpha} + \frac{e^{-\alpha}}{1+c} \right) - C_4 \alpha e^{-\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Составляя матрицу системы (4), (5), вычисляя её определитель, и приравнивая его к нулю, получаем:

$$D(\alpha, c) = \frac{4\alpha^2 - 4\alpha + 1 - e^{-4\alpha} - 4\alpha^2 c^2}{1 - c^2} = 0,$$

откуда

$$c^2 = \frac{1}{4\alpha^2} (2\alpha - 1 + e^{-2\alpha}) (2\alpha - 1 - e^{-2\alpha}).$$

Правая часть представляет собой произведение трёх сомножителей. Первый и второй положительны при $\alpha > 0$, третий имеет ноль при $\alpha = \alpha_s \approx 0.639$, так что $c^2 < 0$ при $0 < \alpha < \alpha_s$, $c^2 > 0$ при $\alpha > \alpha_s$. Таким образом, слой смешения неустойчив, растущим волнам соответствуют волновые числа $0 < \alpha < \alpha_s$.

0.2 Развитие произвольного возмущения с заданными начальными условиями

Выше исследовались специальные решения линеаризованных уравнений Эйлера — решения в виде бегущих волн. Если имеются растущие возмущения такого вида, то система неустойчива. Однако, если все бегущие волны нейтральные или затухающие (или их вообще не существует, как в случае течения Куэтта), то о поведении возмущений произвольного вида, вообще говоря, ничего нельзя сказать, если не доказана полнота системы бегущих волн: возможно, что существуют растущие возмущения другого вида. В этом разделе мы будем изучать произвольные возмущения, заданные в начальный момент произвольными начальными условиями. Для этого нам понадобятся преобразования Фурье и Лапласа, поэтому сначала напомним их определения и свойства [2].

Пусть функция $f(x) \in L_2$ задана на всей действительной оси x . Её преобразованием Фурье называют функцию

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Этот интеграл всегда существует, причём функция $F(k)$ лежит в пространстве L_2 на действительной оси k . Исходная функция восстанавливается по преобразованию с помощью обратного преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk.$$

Рассмотрим теперь функцию $f(t)$ такую, что $f(t) = 0$ при $t < 0$, $|f(t)| < Ce^{pt}$ при $t > 0$ при некоторых константах C, p . Таким функции называются функциями ограниченного роста. Для них определено преобразование Лапласа

$$L(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Преобразование $L(s)$ называется изображением функции $f(t)$, а сама эта функция называется оригиналом. Изображение определено при $\operatorname{Re} s > p$ — в этом случае экспонента под знаком интеграла «нейтрализует» рост функции f , и интеграл сходится. Оригинал восстанавливается по изображению (обратное преобразование Лапласа) с помощью формулы Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{q-i\infty}^{q+i\infty} L(s)e^{st} ds.$$

Интегрирование ведётся в комплексной плоскости s вдоль прямой $\operatorname{Re} s = q$, параллельной мнимой оси s , причём $q > p$.

Преобразования и Фурье, и Лапласа линейны: преобразование линейной комбинации функций есть линейная комбинация преобразований. Их основное свойство, благодаря которому они часто используются при решении дифференциальных уравнений — простота преобразования производных. Для преобразования Фурье, интегрируя по частям и учитывая, что $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, имеем:

$$F \left\{ \frac{df}{dx} \right\} (k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} e^{-ikx} dx = f(x)e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx = ikF\{f\}(k).$$

Аналогично, для преобразования Лапласа

$$L \left\{ \frac{df}{dt} \right\} (s) = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dx = f(x)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = -f(0) + sL\{f\}(s).$$

Таким образом, преобразование Фурье от производной функции сводится к умножению преобразования функции на ik , а преобразование Лапласа — к умножению на s и вычитанию значения функции при $t = 0$ (начального условия). Это свойство позволяет решать линейные дифференциальные уравнения: при преобразовании дифференциального уравнения получается алгебраическое уравнение. Решая его и делая обратное преобразование, получаем решение исходного уравнения.

Применим эту схему к линеаризованной системе уравнений Эйлера — системе (??) с $R = \infty$. Для простоты будем рассматривать двумерные возмущения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{du_0}{dz} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w'}{\partial x} &= -\frac{\partial p'}{\partial z} \end{aligned} \quad (6)$$

При $t = 0$ заданы распределения скорости и давления $u^0(x, z)$, $w^0(x, z)$, $p^0(x, z)$. Будем считать, что начальные данные лежат в пространстве L_2 на оси x . В частности, этому условию удовлетворяют локализованные возмущения. Применим к системе (6) преобразование Фурье по x и Лапласа по t . Изображения под действием преобразования Фурье будем обозначать индексом k , Лапласа — s . Замечая, что дифференцирование по независимой переменной z выносится за преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} iku_{ks} + \frac{\partial w_{ks}}{\partial z} &= 0 \\ -u_k^0 + su_{ks} + u_0 iku_{ks} + w_{ks} \frac{du_0}{dz} &= -ikp_{ks} \\ -w_k^0 + sw_{ks} + u_0 ikw_{ks} &= -\frac{\partial p_{ks}}{\partial z} \end{aligned}$$

Здесь $u_k^0(k, z)$, $w_k^0(k, z)$ — преобразования Фурье начальных условий. Выражая из первого уравнения u_{ks} , подставляя во второе уравнение, выражая из него p_{ks} и подставляя в третье, получаем одно уравнение относительно $w_{ks}(k, z, s)$

$$\left(u_0 - \frac{is}{k}\right) \left(\frac{\partial^2 w_{ks}}{\partial z^2} - k^2 w_{ks}\right) - \frac{d^2 u_0}{dz^2} w_{ks} = -\frac{\partial u_k^0}{\partial z} + ikw_k^0. \quad (7)$$

Заметим, что если сделать замену $k \rightarrow \alpha$, $s \rightarrow -i\omega = -ick$, полученное уравнение совпадает с уравнением Рэлея, за исключением того, что оно неоднородное — имеется ненулевая правая часть, заданная начальными условиями. Преобразуем (7) к виду

$$\frac{\partial^2 w_{ks}}{\partial z^2} - \left(k^2 + \frac{iku_0''}{s + iku_0}\right) w_{ks} = \frac{ik}{s + iku_0} \left(-\frac{\partial u_k^0}{\partial z} + ikw_k^0\right) \equiv \frac{V^0(k, z)}{s + iku_0}. \quad (8)$$

Это уравнение относительно преобразований исходных функций должно решаться с преобразованными граничными условиями: $w_{ks}(z_1) = w_{ks}(z_2) = 0$.

Список литературы

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., 1950. 676 с.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624 с.