

Итак, дальше будем решать уравнение

$$\frac{\partial^2 w_{ks}}{\partial z^2} - \left(k^2 + \frac{iku_0''}{s + iku_0} \right) w_{ks} = \frac{V^0(k, z)}{s + iku_0}, \quad (1)$$

где

$$V^0(k, z) = ik \left(-\frac{\partial u_k^0}{\partial z} + ikw_k^0 \right),$$

с граничными условиями $w_{ks}(z_1) = w_{ks}(z_2) = 0$.

Сначала рассмотрим уравнение с нулевой правой частью — уравнение Рэлея

$$\frac{\partial^2 w_{ks}}{\partial z^2} - \left(k^2 + \frac{iku_0''}{s + iku_0} \right) w_{ks} = 0. \quad (2)$$

Обозначим два линейно-независимых решения $\varphi_j(z, k, s)$, $j = 1, 2$. Тогда общее решение имеет вид $w_{ks} = A\varphi_1(z, k, s) + B\varphi_2(z, k, s)$. Подставляя в граничные условия, получаем систему

$$\begin{aligned} A\varphi_1(z_1, k, s) + B\varphi_2(z_1, k, s) &= 0, \\ A\varphi_1(z_2, k, s) + B\varphi_2(z_2, k, s) &= 0. \end{aligned}$$

Она имеет ненулевые решения при

$$D(k, s) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(z_1, k, s) & \varphi_2(z_1, k, s) \\ \varphi_1(z_2, k, s) & \varphi_2(z_2, k, s) \end{pmatrix} = 0.$$

Получили дисперсионное уравнение, для каждого k определяющее возможные значения s .

Теперь перейдём к неоднородному уравнению (1). Его будем решать с помощью функции Грина. Напомним, функцией Грина $G(z, z_0, k, s)$ для уравнения (1) называется решение уравнения

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - \left(k^2 + \frac{iku_0''}{s + iku_0} \right) G = \delta(z - z_0), \quad (3)$$

удовлетворяющее условиям $G(z_1) = G(z_2) = 0$, где $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака. Если функция Грина найдена, то решение (1) даёт формулой

$$w_{ks}(z, k, s) = \int_{z_1}^{z_2} G(z, z_0, k, s) \frac{V^0(k, z_0)}{s + iku_0(z_0)} dz_0. \quad (4)$$

Найдём функцию Грина. Пусть $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ — решения уравнения (2), такие что $\psi_1(z_1) = \psi_2(z_2) = 0$. Возьмём их в виде

$$\psi_1 = \varphi_1(z, k, s)\varphi_2(z_2, k, s) - \varphi_2(z, k, s)\varphi_1(z_2, k, s), \quad (5)$$

$$\psi_2 = \varphi_1(z, k, s)\varphi_2(z_1, k, s) - \varphi_2(z, k, s)\varphi_1(z_1, k, s). \quad (6)$$

Тогда $G(z) = A\psi_1(z)$ при $z < z_0$, и $G(z) = B\psi_2(z)$ при $z > z_0$. Найдём условие склейки $G(z)$ при $z = z_0$. Интегрируя (3) один раз, получаем: $\Delta G'(z) = 1$, где Δ — скачок функции при переходе через z_0 . Интегрируя второй раз находим $\Delta G(z) = 0$. Таким образом, условия склейки выглядят так:

$$\begin{aligned} A\psi_1(z_0) - B\psi_2(z_0) &= 0, \\ A\psi_1'(z_0) - B\psi_2'(z_0) &= -1. \end{aligned}$$

По формулам Крамера находим A и B :

$$A = \frac{\psi_2(z_0)}{W(\psi_1, \psi_2)}, \quad B = \frac{\psi_1(z_0)}{W(\psi_1, \psi_2)}, \quad W(\psi_1, \psi_2) = \det \begin{pmatrix} \psi_1(z_0) & \psi_2(z_0) \\ \psi_1'(z_0) & \psi_2'(z_0) \end{pmatrix},$$

где $W(\psi_1, \psi_2)$ — вронскиан функций ψ_1 и ψ_2 в точке z_0 . Далее, в силу (6)

$$W(\psi_1, \psi_2) = \det \left(\begin{pmatrix} \varphi_1(z_0) & \varphi_2(z_0) \\ \varphi_1'(z_0) & \varphi_2'(z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_2(z_2) & \varphi_2(z_1) \\ -\varphi_1(z_2) & -\varphi_1(z_1) \end{pmatrix} \right) = W(\varphi_2, \varphi_1)D(k, s).$$

Выберем теперь функции φ_1 и φ_2 , которые пока были произвольными решениями (2), так, чтобы $W(\varphi_2, \varphi_1)$ был равен 1. Тогда, обозначив

$$g(z, z_0) = \begin{cases} \psi_2(z_0)\psi_1(z), & z < z_0 \\ \psi_1(z_0)\psi_2(z), & z > z_0 \end{cases}$$

из (4) получаем:

$$w_{ks}(z, k, s) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{g(k, s, z, z_0)V^0(k, z_0)}{D(k, s)(s + iku_0(z_0))} dz_0. \quad (7)$$

Итак, мы нашли преобразованную функцию $w_{k,s}$. Теперь, применяя обратное преобразование Лапласа, а затем Фурье, будем вычислять оригинал $w(x, z, t)$. Для простоты, чтобы не загромождать выкладки, предположим, что $V^0(k, z) = \delta(z - z^*)$ (начальное возмущение локализовано в точке z^*), тогда

$$w_{ks}(z, k, s) = \frac{g(k, s, z, z^*)}{D(k, s)(s + iku_0(z^*))}. \quad (8)$$

Возьмём обратное преобразование Лапласа. Получим:

$$w_k(z, k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{q-i\infty}^{q+i\infty} \frac{g(k, s, z, z^*)}{D(k, s)(s + iku_0(z^*))} e^{st} ds. \quad (9)$$

Будем сдвигать контур интегрирования в плоскости s влево (уменьшать q). Деформацию в конечной части плоскости можно производить в силу теоремы Коши. В бесконечности контур также можно двигать (в смысле изменения q) по следующим соображениям. Как видно из (2), при $\text{Im } s \rightarrow \pm\infty$ функции g и D стремятся, как

функции s , к константам, e^{st} ограничена. Тогда подынтегральное выражение убывает как $1/|s|$ при $\text{Im } s \rightarrow \pm\infty$. Взяв два вертикальных контура со значениями $q = q_1$ и q_2 , их можно соединить горизонтальными отрезками длины $|q_1 - q_2|$ в бесконечности, так что получится замкнутый контур (рис. 1). Интегралы по горизонтальным отрезкам равны нулю, поскольку подынтегральная функция в бесконечности равна нулю, а длина пути интегрирования конечна. Тогда в силу теоремы Коши получаем, что интегралы по вертикальным прямым с $q = q_1$ и q_2 равны, и деформация контура в бесконечности законна.

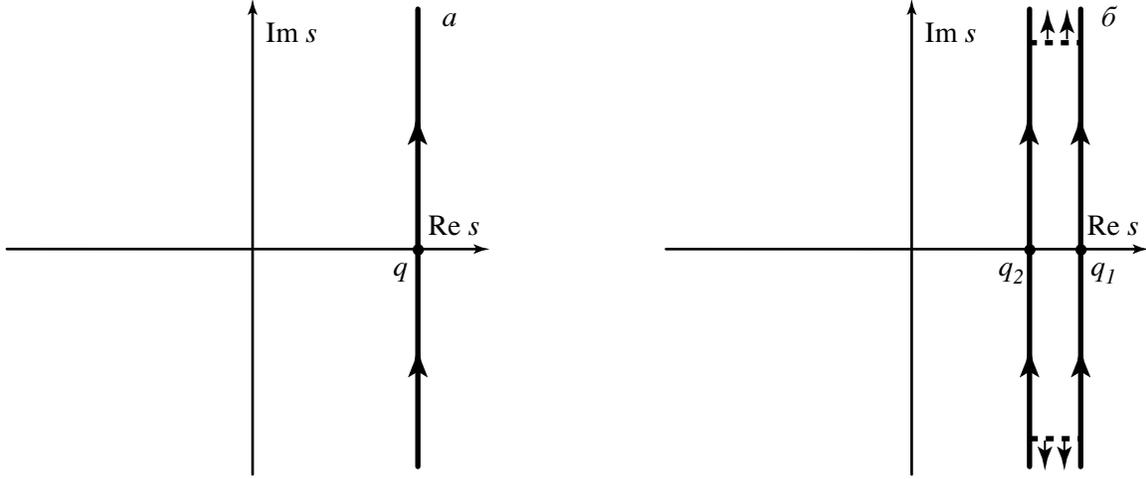


Рис. 1: (а): контур интегрирования в (9). (б): к обоснованию возможности деформации контура в бесконечности.

Движения контура интегрирования влево беспрепятственно продолжается до возникновения особенности подынтегральной функции. Имеется три типа таких особенностей:

1. Нули $D(k, s)$, то есть решения дисперсионного уравнения, которые обозначим $s_n = s_n(k)$. В этих точках подынтегральная функция имеет полюс. По теореме Коши о вычетах при прохождении контура сквозь эти особенности (рис. 2, а) из интеграла выделяются члены

$$\sum_n \frac{g(k, s_n(k), z, z^*)}{D'(k, s_n(k))(s_n(k) + iku_0(z^*))} e^{s_n(k)t}. \quad (10)$$

Вклад дают только простые нули, в которых $D' \neq 0$. Решения дисперсионного уравнения $s_n(k)$ составляют часть спектра системы, называемую «дискретным спектром». Очевидно, дискретный спектр соответствует собственным модам, получающимся из решения уравнения Рэлея. Если имеется хотя бы одна растущая мода ($\text{Re } s_n > 0$), то она даёт экспоненциально растущую часть возмущения в (10). В частности, в случае течения Куэтта дискретный спектр отсутствует, и

движение контура можно продолжать беспрепятственно до «встречи» других особенностей.

В правой полуплоскости $\text{Re } s > 0$ могут встречаться только особенности первого вида. Таким образом контур интегрирования можно довести почти до мнимой оси, $q = \varepsilon \ll 1$, с выделением экспонент (10), рис. 2, б. На мнимой оси имеются ещё две особенности.

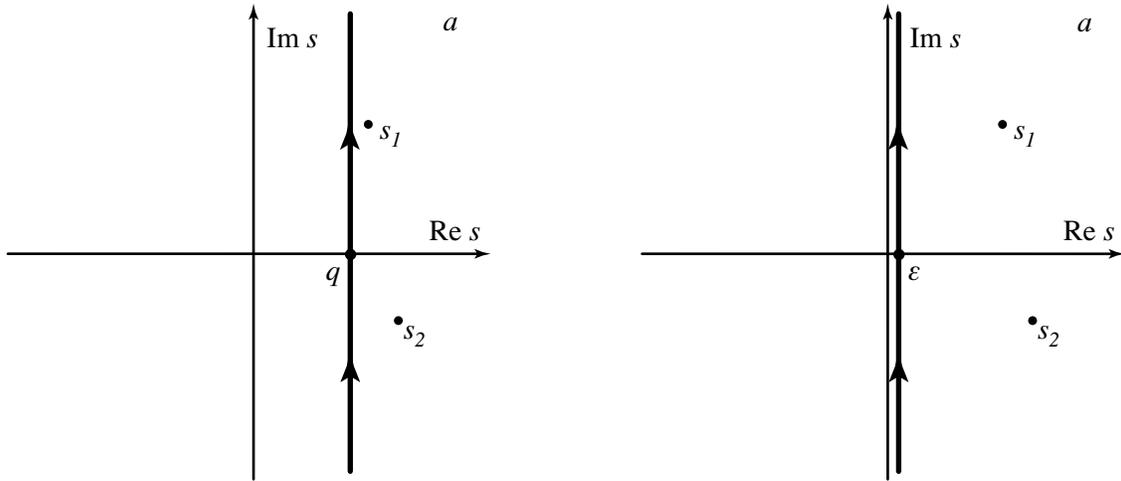


Рис. 2: (а): прохождение особенностей первого вида с выделением вычетов в полюсах. (б): доведение контура интегрирования до $q = \varepsilon$.

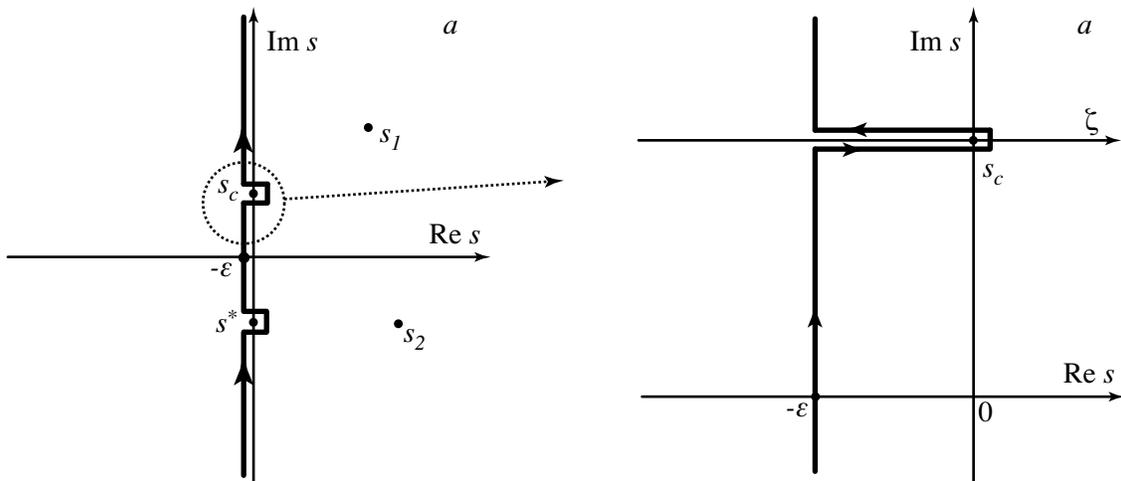


Рис. 3: (а): деформация контура в полуплоскость $\text{Re } s < 0$ с обходом второй и третьей особенности (точек ветвления). (б): увеличенная картина обхода (разреза) и локальная координата ζ .

2. Критическая точка $s_c = -iku_0(z)$. В ней имеется особенность уравнения Рэлея (2) и следующая отсюда по построению особенность $g(k, s, z, z^*)$. В разделе ?? было установлено, в малой окрестности критической точки радиуса ε решения (2), а следовательно, и g , имеют особенность вида $\zeta \ln \zeta$, где $\zeta = s - s_c$. Поскольку здесь имеется точка ветвления, деформация контура интегрирования в область $\text{Re } s < 0$ возможно только с построением разреза, обходящего точку ветвления (рис. 3). Поскольку «основной» контур интегрирования, доведённый до $q = -\varepsilon$, даёт функцию, экспоненциально затухающую с течением времени, остановимся на оценке вкладов от разреза. Так как при переходе с одного берега разреза на другой $\ln \zeta$ скачком меняется на $2\pi i$, то, учитывая направление интегрирования, интеграл по разрезу равен

$$-c_1(k, z, z^*)e^{s_c t} \int_{-\varepsilon}^0 \zeta e^{\zeta t} d\zeta = -c_1(k, z, z^*)e^{s_c t} \left(\frac{\zeta}{t} - \frac{1}{t^2} \right) e^{\zeta t} \Big|_{-\varepsilon}^0.$$

Здесь $c_1(k)$ — некоторая функция, заданная регулярной частью подынтегрального выражения. Относя слагаемое порядка $e^{-\varepsilon t}$ к экспоненциально затухающей части возмущения, окончательно получаем неэкспоненциальный вклад этой особенности

$$c_1(k, z, z^*) \frac{e^{s_c t}}{t^2} = c_1(k, z, z^*) \frac{e^{-iku_0(z)t}}{t^2}. \quad (11)$$

Как видим, эта функция убывает с течением времени как $1/t^2$.

3. Последняя особенность — критическая точка $s^* = -iku_0(z^*)$. Особенность одновременно имеет и g , и знаменатель в (9). В окрестности s^* имеем: $g \sim c_2 \zeta \ln \zeta + c_3$, знаменатель $\sim \zeta$, где $\zeta = s - s^*$. Отсюда всё подынтегральное выражение имеет порядок

$$c_2 \ln \zeta + \frac{c_3}{\zeta}.$$

Второе слагаемое даёт простой полюс. Вклад первого слагаемого вычисляется также, как для особенности s_c : вычисление интеграла вдоль разреза, обходящего точку ветвления. Так как перепад $\ln \zeta$ на разных берегах разреза равен $2\pi i$, вычисляем интеграл вдоль разреза:

$$-c_2(k, z, z^*)e^{s^* t} \int_{-\varepsilon}^0 e^{\zeta t} d\zeta = -c_2(k, z, z^*)e^{s^* t} \frac{e^{\zeta t}}{t} \Big|_{-\varepsilon}^0.$$

Слагаемое порядка $e^{-\varepsilon t}$ относим к экспоненциально затухающей части возмущения. Тогда с учётом полюса получаем вклад особенности s^* :

$$-c_2(k, z, z^*) \frac{e^{s^* t}}{t} + c_3(k, z, z^*) e^{s^* t} = \left(-\frac{c_2(k, z, z^*)}{t} + c_3(k, z, z^*) \right) e^{-iku_0(z^*)t}. \quad (12)$$

Видно, что он представляет собой сумму функции, затухающей со временем как $1/t$, и экспоненты с чисто мнимым показателем. Отметим важное отличие

этой последней экспоненты от вклада особенностей первого вида: при разных z^* показатель экспоненты различен. Если начальное возмущение не локализовано в точке z^* , то решение будет иметь вид свёртки (12) с преобразованием начального условия; в результате будем иметь пакет волн, движущихся со всевозможными скоростями $u_0(z)$. При всех возможных z показатель непрерывно пробегает отрезок мнимой оси, поэтому эту часть спектра называют «непрерывным спектром».

Итак, объединяя (10), (11), (12), получаем следующее выражение:

$$w_k(z, k, t) = \sum_n a_n(k, z, z^*) e^{s_n(k)t} + c_1(k, z, z^*) \frac{e^{-iku_0(z)t}}{t^2} + \left(-\frac{c_2(k, z, z^*)}{t} + c_3(k, z, z^*) \right) e^{-iku_0(z^*)t} + \tilde{w}_k(z, k, t), \quad (13)$$

причём «остаток» $\tilde{w}_k(z, k, t)$ с течением времени затухает не медленнее, чем $e^{-\epsilon t}$.

Наконец, обратным преобразованием Фурье восстановим функцию w . Кроме того, далее нас будет интересовать поведение решения при больших временах, поэтому слагаемые порядка $1/t$, $1/t^2$ отнесём к затухающей части \tilde{w} . :

$$w(x, z, t) = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} a_n(k, z, z^*) e^{ikx + s_n(k)t} dk + \int_{-\infty}^{\infty} c_3(k, z, z^*) e^{ik(x - u_0(z^*)t)} dk + \tilde{w}(x, z, t). \quad (14)$$

Множитель $1/(2\pi)$ в обратном преобразовании для краткости включен в a_n и c_3 .

Заметим, что во втором слагаемом (14) x и t входят только в комбинации $x - u_0(z^*)t$. Это значит, что возмущение поступательно движется (сносится) со скоростью потока жидкости. Так как начальное возмущение локализовано, при $t \rightarrow \infty$ в каждой фиксированной точке пространства x второе слагаемое обращается в ноль.

Оценка поведения первого слагаемого при $t \rightarrow \infty$ нетривиальна и может быть проведена методом перевала. Это исследование будет проведено в конце курса, сейчас заметим лишь, что только первое слагаемое может приводить к росту возмущения, то есть к неустойчивости. Пусть $s_{\max} = \max_{k,n} \operatorname{Re} s_n(k) > 0$. Тогда в первом слагаемом (14) с течением времени будет доминировать гармоника с $s = s_{\max}$.

Мы рассмотрели случай, когда начальное возмущение локализовано: $V^0(k, z) = \delta(z - z^*)$. В общем случае в (14) появятся свёртки по z^* с преобразованием начальных условий. Третье затухающее слагаемое, очевидно, останется затухающим. Второе слагаемое, определяющее непрерывный спектр, даст волны, движущиеся с всевозможными скоростями u_0 , однако с течением времени оно по-прежнему не будет усиливаться. Свёртка первого слагаемого с V^0 сведётся к свёртке V^0 с a_n , поскольку показатели экспонент дискретного спектра не зависят от z^* .

Итак, мы доказали, что произвольное возмущение с течением времени представляет собой наложение трёх составляющих: затухающую компоненту; нейтральную компоненту, определяемую непрерывным спектром; и компоненту, определяемую дискретным спектром — собственными значениями уравнения Рэлея. Неустойчивость

определяется только дискретным спектром. Таким образом, исследование собственных мод уравнения Рэля достаточно для исследования устойчивости произвольных возмущений, хотя система таких мод не полна.

Вернёмся ещё раз к причине существования непрерывного спектра. Особенности второго и третьего вида (которые и порождают непрерывный спектр и неэкспоненциальные составляющие возмущений) возникли из-за того, что в уравнении (1) имеются знаменатели, в критической точке обращающиеся в ноль. Эти знаменатели, в конечном итоге, возникли из-того, что в уравнении Рэля коэффициент $u_0 - c$ при старшей производной может обращаться в ноль. Таким образом, непрерывный спектр — следствие сингулярности уравнения Рэля. Для возмущения, описываемых регулярными уравнениями, то есть уравнениями, в которых коэффициент при старшей производной всегда отличен от нуля (например, уравнением Орра-Зоммерфельда), в (9) числитель не имел бы особенностей, а нули знаменателя определялись бы только нулями $D(k, s)$. В таких системах смещение контура интегрирования влево в пределе $q \rightarrow -\infty$ происходит с выделением только вычетов подынтегральной функции, определяемых нулями $D(k, s)$. В этом случае непрерывный спектр отсутствует, а система собственных мод полна.