

На прошлой лекции было показано, что при больших  $R$  два решения уравнения Орра-Зоммерфельда близки к решениям уравнения Рэлея, два других являются ВКБ-решениями. С последними имеются две проблемы. Во-первых, они справедливы вне некоторой окрестности точек поворота. Во-вторых, ВКБ-решения многозначны и поэтому аппроксимируют однозначные точные решения лишь локально. Априори неясно, как продолжить их на всю комплексную плоскость (за исключением окрестности точек поворота), чтобы они правильно приближали точные решения. Для выяснения этих вопросов рассмотрим другое асимптотическое разложение решений, верное в малой окрестности точки поворота.

### 0.0.1 Решения в окрестности точки поворота

Будем рассматривать решение в малой окрестности точки поворота. Разложим  $u_0(z)$  по формуле Тейлора:  $u'_0(z - z_c) + u''_0(z - z_c)^2/2 + \dots$ , также для удобства разделим уравнение Орра-Зоммерфельда на  $u'_0$ :

$$\frac{1}{iR\alpha u'_0} \left( \frac{d^4 w}{dz^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + \alpha^4 w \right) = \left( (z - z_c) + \frac{u''_0}{2u'_0} (z - z_c)^2 + \dots \right) \left( \frac{d^2 w}{dz^2} - \alpha^2 \right) - \frac{u''_0}{u'_0} w.$$

Введём локальную переменную  $\eta = (z - z_c)/\varepsilon^n$ , где  $\varepsilon = (iR\alpha u'_0)^{-1}$ . Получим:

$$\varepsilon \left( \frac{1}{\varepsilon^{4n}} \frac{d^4 w}{d\eta^4} - \frac{2\alpha^2}{\varepsilon^{2n}} \frac{d^2 w}{d\eta^2} + \alpha^4 w \right) = \left( \eta \varepsilon^n + \frac{u''_0}{2u'_0} \eta^2 \varepsilon^{2n} + \dots \right) \left( \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \frac{d^2 w}{d\eta^2} - \alpha^2 \right) - \frac{u''_0}{u'_0} w. \quad (1)$$

Сравнивая степени при старших членах, видно, что нетривиальное соотношение получается при  $n = 1/3$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим соотношение при старших членах порядка  $\varepsilon^{-1/3}$ :

$$\frac{d^4 w}{d\eta^4} - \eta \frac{d^2 w}{d\eta^2} = 0 \quad (2)$$

Линейно-независимые решения этого уравнения будем обозначать  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Первые два решения тривиальны:

$$\varphi_1 = \eta, \quad \varphi_2 = 1. \quad (3)$$

Сравнивая их с решениями (??), нетрудно увидеть, что (3) есть локальное разложение невязких решений (??):

$$\varphi_1 \sim w_1, \quad \varphi_2 \sim w_2.$$

Другие два решения выражаются интегралами

$$\varphi_3(\eta) = \iint f_1(\eta), \quad \varphi_4(\eta) = \iint f_2(\eta),$$

где  $f_1, f_2$  — решения уравнения

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} - \eta f = 0 \quad (4)$$

Это уравнение называется уравнением Эйри. При вещественных  $\eta$  оно описывает переход от колебательного ( $\eta < 0$ ) к экспоненциально затухающему или растущему ( $\eta > 0$ ) процессу. Заметим, что если  $f(\eta)$  — решение (4), то  $f(\eta e^{\pm 2\pi i/3})$  — тоже решения (4).

**Теорема о функции Эйри** (без доказательства). Уравнение (4) имеет решение  $\text{Ai}(\eta)$ , называемое функцией Эйри, обладающее следующими свойствами:

1.  $\text{Ai}(\eta)$  голоморфна во всей комплексной плоскости  $\eta$
2. При  $\eta \rightarrow \infty$ ,  $|\arg \eta| \leq \pi - \delta$  ( $\delta$  — произвольная малая величина) функция Эйри ведёт себя асимптотически как

$$\text{Ai}(\eta) \sim \frac{\exp(-\frac{2}{3}\eta^{3/2})}{2\sqrt{\pi}\eta^{1/4}}. \quad (5)$$

3. В малой окрестности луча  $\arg \eta = \pi$  разложение (5) неверно и терпит разрыв при пересечении этого луча. При  $\arg \eta = \pi$  (отрицательные вещественные значения),  $|\eta| \rightarrow \infty$  асимптотическое поведение следующее:

$$\text{Ai}(\eta) \sim \frac{\sin(\frac{2}{3}|\eta|^{3/2} + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}|\eta|^{1/4}}.$$

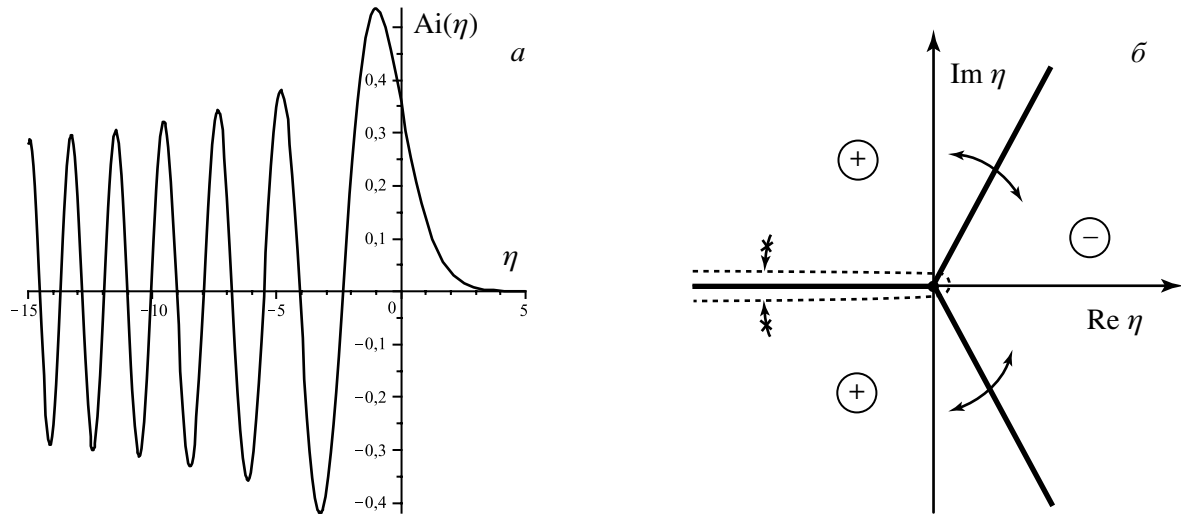


Рис. 1: График функции Эйри вещественного аргумента (а). Область применимости ВКБ-разложения (5) (б). Жирными показаны линии Стокса, знаки «+» и «-» показывают сектора, где функция Эйри доминантна и рецессивна соответственно.

График  $\text{Ai}(\eta)$  на вещественной оси показан на рис. 1, а, поведение в комплексной плоскости — на рис. 2. Из этой теоремы непосредственно следуют следующие свойства:

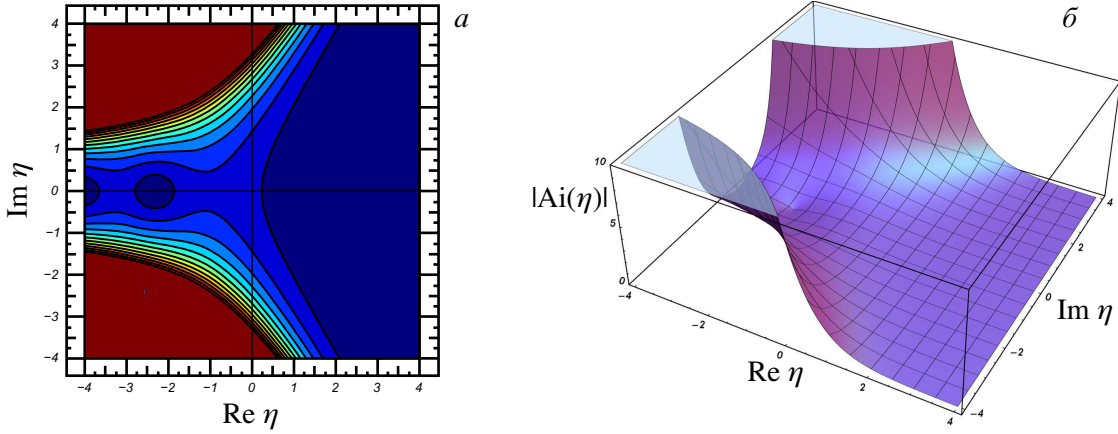


Рис. 2: Линии уровня (а) и поверхность (б)  $|\text{Ai}(\eta)|$  комплексного аргумента.

1. Разложение (5) есть ВКБ-приближение для  $\text{Ai}(\eta)$  при больших  $|\eta|$ . Линии Стокса для этого приближения — лучи  $\arg \eta = \pm\pi/3, \pi$ . В секторе  $-\pi/3 < \arg \eta < \pi/3$  решение  $\text{Ai}(\eta)$  — рецессивное, в секторах  $\pi/3 < \arg \eta < \pi$  и  $-\pi < \arg \eta < -\pi/3$  — доминантное (рис. 1, б).

2. Решения  $\text{Ai}(\eta e^{\pm 2\pi i/3})$  — рецессивные в двух других секторах соответственно. Любое из них линейно-независимо с  $\text{Ai}(\eta)$ . Все три решения линейно-зависимы, поскольку являются решениями уравнения (4) второго порядка. Можно доказать, что

$$\text{Ai}(\eta) + e^{2\pi i/3} \text{Ai}(\eta e^{2\pi i/3}) + e^{-2\pi i/3} \text{Ai}(\eta e^{-2\pi i/3}) = 0$$

3. Если решение рецессивное в каком-либо секторе, то его ВКБ-разложение можно продолжить в соседние сектора, где оно становится доминантным. Дальнейшее продолжение невозможно, так как ВКБ-разложение неверно на границе двух доминантных секторов (рис. 1, б).

4. Если решение доминантное в каком-либо секторе, то его ВКБ-разложение можно продолжить лишь в один соседний сектор, где оно становится рецессивным. Дальнейшее продолжение справедливо в силу предыдущего пункта, что определяет ВКБ-разложение на всей плоскости, кроме окрестности границы двух доминантных секторов.

Сравним полученные решения в окрестности точки поворота  $\varphi_{3,4}(\eta)$  с ВКБ-решениями (??), справедливыми вне окрестности точки поворота. Чтобы воспользоваться асимптотическими представлениями функции Эйри, удобнее сравнивать не

сами решения, а их вторые производные. Имеем:

$$\begin{aligned}\varphi''_{3,4}(z) &= \frac{1}{\varepsilon^{2/3}} \varphi''_{3,4}(\eta) = \frac{1}{\varepsilon^{2/3}} \text{Ai}(\eta) \sim \frac{1}{\varepsilon^{2/3}} \frac{\exp(-\frac{2}{3}\eta^{3/2})}{2\sqrt{\pi}\eta^{1/4}} = \frac{1}{\varepsilon^{7/12}} \frac{\exp(-\frac{2}{3}(z-z_c)^{3/2}\varepsilon^{-1/2})}{2\sqrt{\pi}(z-z_c)^{1/4}} = \\ &= (iR\alpha u'_0)^{7/12} \frac{\exp(-\frac{2}{3}\sqrt{iR\alpha u'_0}(z-z_c)^{3/2})}{2\sqrt{\pi}(z-z_c)^{1/4}}.\end{aligned}\quad (6)$$

Вместо самой функции Эйри можно взять её модификации, повёрнутые на угол  $2\pi/3$ , при этом отличие ВКБ-разложения будет лишь в выборе другой ветви квадратного корня. Это разложение, как и вообще асимптотические решения в окрестности точки поворота, справедливо при  $|z-z_c| \ll (R\alpha)^{-1/3}$ .

С другой стороны, ВКБ-приближение справедливо при  $|z-z_c| \gg (R\alpha)^{-1/3}$ . Поскольку  $\sqrt{R\alpha}$  — большой параметр, то при дифференцировании (??) достаточно дифференцировать только экспоненту, считая множитель при экспоненте постоянным; при этом будет соблюден тот же порядок аппроксимации, что и в самом ВКБ-приближении. При малых  $|z-z_c|$  показатель экспоненты вычислен в (??). Тогда получаем:

$$w''_{3,4}(z) = \frac{A_{3,4}iR\alpha}{u_0^{1/4}} \frac{1}{(z-z_c)^{1/4}} \exp\left(\sqrt{iR\alpha u'_0} \frac{2}{3}(z-z_c)^{3/2}\right).\quad (7)$$

Сравнивая (6) и (7), видно, что решения срачиваются, если выбрать подходящим образом константы  $A_{3,4}$  и ветви квадратных корней. Однако, области, где справедливы разложения (6) и (7), не пересекаются.

Рассмотрение следующих приближений решения в окрестности точки поворота позволяет расширить область его справедливости до  $|z-z_c| \ll (R\alpha)^{-1/5}$ , при этом оно по-прежнему срачивается с ВКБ-решением (это утверждение оставим без доказательства). Тогда в области

$$(R\alpha)^{-1/3} \ll |z-z_c| \ll (R\alpha)^{-1/5}$$

оба приближения — в окрестности точки поворота и ВКБ — верны и совпадают. Таким образом, эти два приближения срачиваются в указанной области. Метод построения приближений, справедливых в разных областях плоскости  $z$ , совпадающих в пересечении этих областей, называется «методом срачиваемых асимптотических разложений».

Срачивание решения в окрестности точки поворота с ВКБ-решением переносит на последнее все свойства функции Эйри, касающиеся продолжения решений через линии Стокса. А именно, из сектора, где данное решение рецессивно, его можно продолжить в два соседних сектора, в которых оно становится доминантным. Но продолжение через следующую линию Стокса, разделяющую два этих сектора, невозможно (рис. 3). Таким образом, неоднозначность ВКБ-решения теперь устранена.

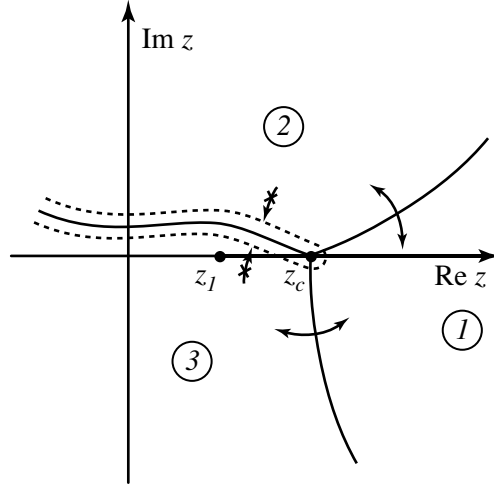


Рис. 3: Область применимости ВКБ-разложения в физической плоскости  $z$ , если в секторе 1 для удовлетворения граничному условию при  $z \in \mathbb{R}$ ,  $z \rightarrow +\infty$  выбирается рецессивное решение. В секторах 2 и 3 решение становится доминантным, переход через линию Стокса, разделяющую сектора 2 и 3, запрещён, поскольку ВКБ-приближение в её окрестности неприменимо.

### 0.0.2 Вязкая поправка невязкого сингулярного решения

Вторая, ещё не устранённая неоднозначность — логарифмическая особенность невязкого сингулярного решения  $w_2$ . Для её устранения необходимо рассмотреть второй член разложения решений в окрестности точки поворота. Структура (1) подсказывает искать решение в виде ряда по степеням  $\varepsilon^{1/3}$ . Ограничимся двумя членами ряда:

$$w(\eta) = \varphi^{(0)}(\eta) + \varepsilon^{1/3} \varphi^{(1)}(\eta) + o(\varepsilon^{1/3}), \quad (8)$$

причём  $\varphi^{(0)}(\eta)$  фактически было найдено выше. Подставим это выражение в (1) и рассмотрим соотношение при  $\varepsilon^0$ :

$$\frac{d^4 \varphi^{(1)}}{d\eta^4} = \eta \frac{d^2 \varphi^{(1)}}{d\eta^2} + \frac{u_0''}{2u_0'} \eta^2 \frac{d^2 \varphi^{(0)}}{d\eta^2} - \frac{u_0''}{u_0'} \varphi^{(0)},$$

или

$$\frac{d^4 \varphi^{(1)}}{d\eta^4} - \eta \frac{d^2 \varphi^{(1)}}{d\eta^2} = \frac{u_0''}{u_0'} \left( \frac{\eta^2}{2} \frac{d^2 \varphi^{(0)}}{d\eta^2} - \varphi^{(0)} \right). \quad (9)$$

Рассмотрим регулярное решение,  $\varphi_1^{(0)} = \eta$ . Тогда получим:

$$\frac{d^4 \varphi_1^{(1)}}{d\eta^4} - \eta \frac{d^2 \varphi_1^{(1)}}{d\eta^2} = -\frac{u_0''}{u_0'} \eta.$$

Очевидное решение, сращиваемое с невязким решением вне окрестности точки поворота, имеет вид

$$\varphi_1^{(1)} = \frac{u_0''}{u_0'} \frac{\eta^2}{2}.$$

Теперь рассмотрим сингулярное решение,  $\varphi_2^{(0)} = 1$ . Уравнение (9) примет вид

$$\frac{d^4 \varphi_2^{(1)}}{d\eta^4} - \eta \frac{d^2 \varphi_2^{(1)}}{d\eta^2} = -\frac{u_0''}{u_0'}. \quad (10)$$

Мы хотим найти такое решение этого уравнения, чтобы вне окрестности точки поворота (8) срачивалось с сингулярным решением, которое в координатах  $\eta$  имеет вид

$$w_2 = \frac{u_0''}{u_0'}(z - z_c) \ln(z - z_c) + Q(z) = \frac{u_0''}{u_0'} \eta \varepsilon^{1/3} (\ln \eta + \frac{1}{3} \ln \varepsilon) + 1 + q\eta \varepsilon^{1/3} + o(\varepsilon^{1/3}).$$

Поскольку решение (10)  $\varphi_2^{(1)}$  определено с точностью до линейной функции, фактически достаточно удовлетворить условию

$$\varphi_2^{(1)} \sim \frac{u_0''}{u_0'} \eta \ln \eta, \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (11)$$

**Теорема о вязкой поправке невязкого сингулярного решения** (без доказательства). Существует решение  $\varphi_2^{(1)}(\eta)$  уравнения (10), удовлетворяющее условию (11) в секторе  $-\pi < \arg \eta < \pi/3$ . В секторе  $\pi/3 < \arg \eta < \pi$  это решение экспоненциально растёт и, как следствие, условию (11) не удовлетворяет (рис. 4, а).

Поскольку наряду с  $\varphi_2^{(1)}(\eta)$  уравнению (10) также удовлетворяют функции  $e^{\mp 2\pi i/3} \varphi_2^{(1)}(\eta e^{\pm 2\pi i/3})$ , получающиеся поворотом комплексной плоскости  $\eta$  на угол  $2\pi/3$  в любую сторону, существуют решения, удовлетворяющие условию срачивания (11) в любых двух секторах, но не срачиваемые с невязким решением в третьем секторе.

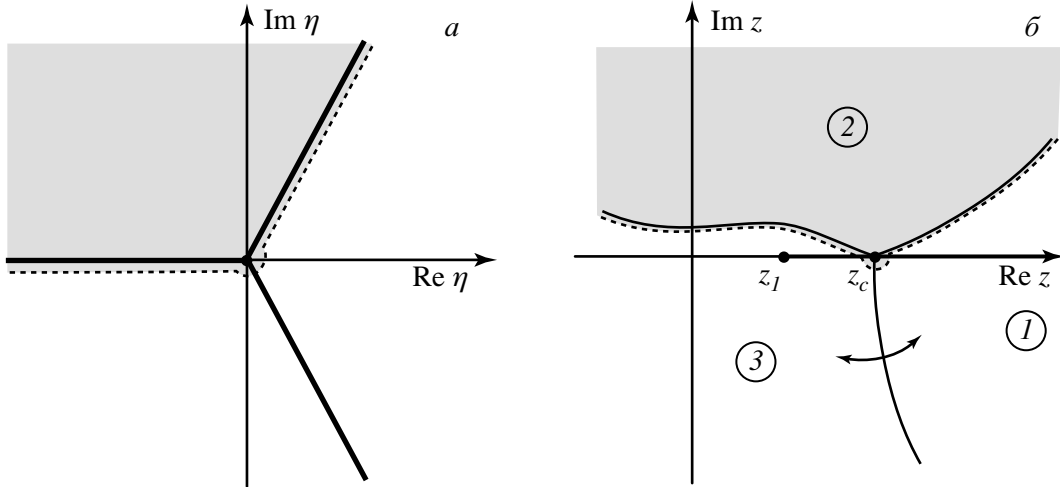


Рис. 4: Решение  $\varphi_2^{(1)}(\eta)$  удовлетворяет условию срачивания (11) везде, кроме затемнённой области (а). Отображение в физическую плоскость  $z$  (б).

После перехода из плоскости  $\eta$  в физическую плоскость  $z$  очевидно, что нужно выбрать решение, срачиваемое с невязким в секторах, содержащих граничные условия, то есть в секторах 1 и 3 (рис. 4, б). Тогда теорему можно переформулировать так. Вязкое решение близко к невязкому сингулярному решению в секторах 1 и 3 (за исключением окрестности радиуса  $\sim (\alpha R)^{1/3}$  точки поворота). В секторе 2 оно ведёт себя совершенно иначе — экспоненциально усиливается. То есть при больших  $R$  влияние вязкости существенно не только в малой окрестности точки поворота, но и в целом секторе комплексной плоскости  $z$ . Как следствие, невязкое сингулярное решение можно продолжать, переходя из сектора 1 в 3 и обратно через разделяющую их линию Стокса. Две другие линии Стокса пересекать запрещено. Другими словами, логарифмическую точку ветвления всегда нужно обходить в комплексной плоскости снизу, что устраняет неоднозначность решения. Формальный обход точки ветвления сверху даст невязкое решение, которое в секторе 2 и во всех следующих секторах, куда оно будет продолжено, не близко к решению уравнения Орра-Зоммерфельда при сколь угодно малой, но отличной от нуля, вязкости и, следовательно, нефизично. Это правило обхода критической точки снизу иногда называют «правилом обхода Линя».

Полученное правило обхода приводит к тому, что, хотя комплексным сопряжением уравнения Рэлея можно показать, что его собственные значения комплексно-сопряжены, из каждой комплексно-сопряжённой пары лишь одно значение удовлетворяет правилу обхода и является пределом решения вязкой задачи при  $R \rightarrow \infty$ , а второе значение не удовлетворяет ему и, следовательно, нефизично.

Этот результат имеет ещё одно интересное следствие. Если точка поворота находится в верхней полуплоскости (растущие возмущения), то влияние вязкости при больших  $R$  не сказывается на невязком решении в физической области течения на вещественной оси  $z$  (рис. 5, а). Если же точка поворота находится в нижней полуплоскости (затухающие возмущения), то отрезок вещественной оси, лежащей между точками пересечения вещественной оси линиями Стокса, попадает в сектор 2, в котором решение ведёт себя экспоненциально. Наличие сколь угодно малой вязкости существенно меняет невязкое решение, причём длина отрезка, на котором это происходит, определяется только линиями Стокса и при  $R \rightarrow \infty$  остаётся конечной (рис. 5, б). Область течения жидкости, соответствующая этому отрезку, называется «вязким слоем» или «критическим слоем», чтобы подчеркнуть его ненулевую толщину. В случае нейтральных возмущений критический слой вырождается в «критическую точку» (на самом деле остаётся слой толщины  $\sim (\alpha R)^{-1/3}$  — радиус окрестности критической точки); в растущих возмущениях он исчезает.

Во всех рассуждениях этого раздела считалось, что при для нейтрального возмущения  $u'_0(z_c) > 0$ . Если  $u'_0(z_c) < 0$ , то структура линий Стокса выглядит отражённой относительно вещественной оси  $z$ . Обход критической точки при этой должен проводится сверху.

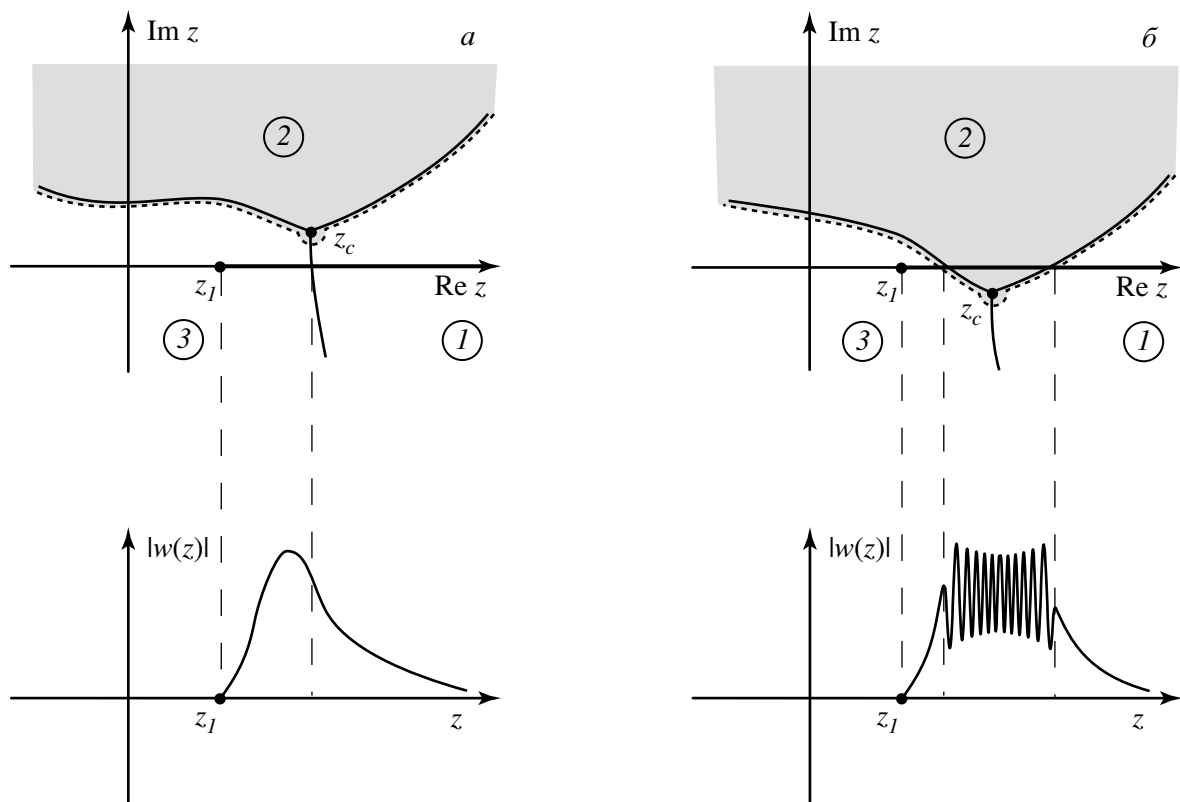


Рис. 5: Верхние рисунки: линии Стокса и область экспоненциального поведения вязкой поправки, если точка поворота лежит выше (а) и ниже (б) вещественной оси. Нижние рисунки: видимое поведение возмущений при «физических» вещественных  $z$  в обоих случаях.